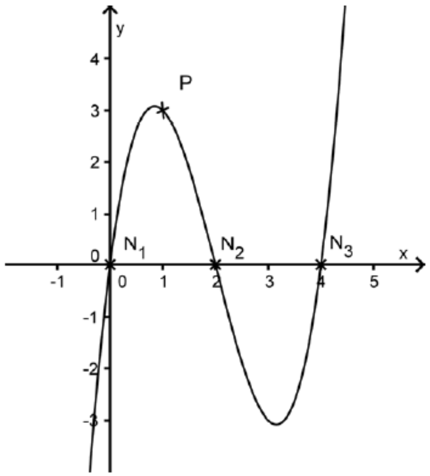
Abitur 2009 Mathematik GK Infinitesimalrechnung I

Die Abbildung zeigt den Graphen G_f einer ganzrationalen Funktion f dritten Grades mit dem Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}$. Die in der Abbildung angegebenen Punkte $P(1|3), N_1(0|0), N_2(2|0)$ und $N_3(4|0)$ sind Punkte von G_f.



Teilaufgabe 1a (5 BE)

Geben Sie den Funktionsterm von f in der Form $f(x) = a(x-b)(x-c)(x-d)$ an, indem Sie passende Werte für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ermitteln. Zeigen Sie, dass sich dieser in der Form $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$ schreiben lässt.

Teilaufgabe 1b (6 BE)

Weisen Sie nach, dass N_2 Wendepunkt von G_f ist, und ermitteln Sie die Gleichung der zugehörigen Wendetangente.

[Zur Kontrolle: Tangentengleichung $y = -4x + 8$]

Teilaufgabe 1c (4 BE)

Die Wendetangente schließt mit den Koordinatenachsen ein Dreieck ein. Bestimmen Sie die Innenwinkel dieses Dreiecks.

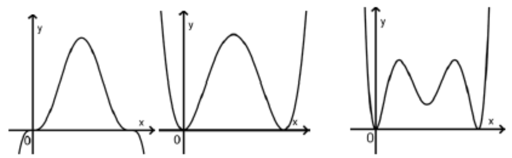
Betrachtet wird nun die Integralfunktion $F : x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$ mit $D_F = \mathbb{R}$.

Teilaufgabe 1d (8 BE)

Berechnen Sie $F(4)$. Was folgt daraus für die beiden Flächenstücke, die der Graph G_f mit der x-Achse im I. und im IV. Quadranten einschließt? Begründen Sie Ihre Antwort. Bestimmen Sie nun die Summe der Inhalte dieser beiden Flächenstücke.

Teilaufgabe 1e (4 BE)

Einer der drei abgebildeten Graphen I, II oder III stellt den Graphen von F dar. Geben Sie an, welcher dies ist, und begründen Sie Ihre Antwort, indem Sie erklären, warum die beiden anderen Graphen nicht in Betracht kommen.



Graph I Graph II Graph III

Teilaufgabe 1f (3 BE)

Bekanntlich ist jede Integralfunktion der Funktion f auch Stammfunktion von f. Begründen Sie, dass jede Integralfunktion mindestens eine Nullstelle hat. Geben Sie den Term einer Stammfunktion von f an, die keine Integralfunktion von f ist.

In der Medizin wird radioaktives Jod-123 zur Untersuchung der Schilddrüse eingesetzt. Kurze Zeit nach der Verabreichung dieser Substanz an den Patienten wird die von der Substanz ausgehende Strahlung gemessen, wodurch Rückschlüsse auf den Zustand der Schilddrüse möglich sind.
Durch radioaktiven Zerfall verringert sich die Substanzmasse.
Die im Körper des Patienten noch vorhandene Masse m des verabreichten Jod-123 lässt sich durch den Term $m(t) = m_0 \cdot e^{-k\,t}$ mit $k > 0$ beschreiben. Dabei gibt m_0 die zum Zeitpunkt $t = 0$ verabreichte Jodmasse an; t ist die Maßzahl der seit Verabreichung vergangenen Zeit in Stunden.

Teilaufgabe 2a (4 BE)

Nach einer Zeit von 13,2 Stunden ist nur noch die Hälfte der verabreichten Jodmasse vorhanden. Bestimmen Sie hieraus den Wert des Parameters k.

[Zur Kontrolle: $k \approx 0,0525$]

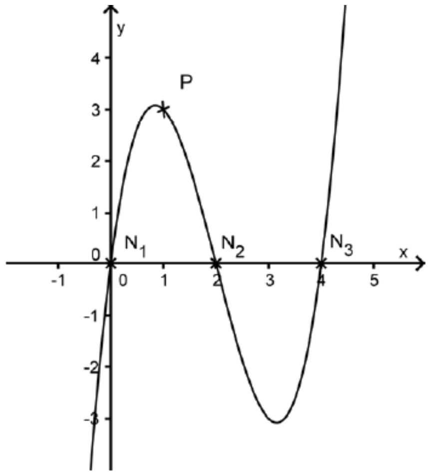
Teilaufgabe 2b (6 BE)

Wie viel Prozent der verabreichten Jodmasse sind vier Stunden nach Verabreichung im Körper des Patienten noch vorhanden? Wie lange dauert es, bis 90% der verabreichten Jodmasse zerfallen sind?

Lösung

Teilaufgabe 1a (5 BE)

Die Abbildung zeigt den Graphen G_f einer ganzrationalen Funktion f dritten Grades mit dem Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}$. Die in der Abbildung angegebenen Punkte $P(1|3), N_1(0|0), N_2(2|0)$ und $N_3(4|0)$ sind Punkte von G_f.



Geben Sie den Funktionsterm von f in der Form $f(x) = a(x-b)(x-c)(x-d)$ an, indem Sie passende Werte für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ermitteln. Zeigen Sie, dass sich dieser in der Form $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$ schreiben lässt.

Lösung zu Teilaufgabe 1a

Funktionsgleichung ermitteln

$P(1|3), N_1(0|0), N_2(2|0), N_3(4|0)$

$f(x) = a(x-b)(x-c)(x-d)$

Nullstellen einsetzen:

Erläuterung: *Nullstellen*

Die Funktionsgleichung einer ganzrationalen Funktion 3° Grades lautet allgemein:

$f(x) = A\,x^3 + B\,x^2 + C\,x + D$ mit $A, B, C, D \in \mathbb{R}$

Die Funktionsgleichung in der Angabe:

$f(x) = a(x-b)(x-c)(x-d)$

ist die sogenannte faktorisierte Form. Aus ihr kann man direkt die Nullstellen b, c, d der Funktion f ablesen.

Die Punkte N_1, N_2 und N_3 sind die Nullstellen des Funktionsgraphen G_f, somit ist:

$b = 0$ (aus N_1), $c = 2$ (aus N_2) und $d = 4$ (aus N_3)

$f(x) = a(x-0)(x-2)(x-4)$

Punkt P einsetzen:

Erläuterung: *Einsetzen*

Der Funktionsgraph G_f verläuft durch den Punkt P, d.h. die Punktkoordinaten von P erfüllen die Funktionsgleichung.

$3 = f(1) = a(1)(1-2)(1-4) = a(-1)(-3) = 3a$
$3 = 3a$
$1 = a$

Die Funktionsgleichung lautet somit:

$f(x) = x(x-2)(x-4)$

Ausmultiplizieren ergibt:

$f(x) = x(x-2)(x-4) = \left(x^2 - 2x\right)(x-4) = x^3 - 4x^2 - 2x^2 + 8x = x^3 - 6x^2 + 8x$

Teilaufgabe 1b (6 BE)

Weisen Sie nach, dass N_2 Wendepunkt von G_f ist, und ermitteln Sie die Gleichung der zugehörigen Wendetangente.

[Zur Kontrolle: Tangentengleichung $y = -4x + 8$]

Lösung zu Teilaufgabe 1b

Wendepunkt ermitteln

$N_2(2|0)$

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$

Erste Ableitung bilden:

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 8$

Zweite Ableitung bilden:

$f''(x) = 6x - 12$

Zweite Ableitung Null setzen:

$f''(x) = 0 \iff 6x - 12 = 0 \Rightarrow x^W = 2$

$f(x^W) = f(2) = 0 = y^W$

Dritte Ableitung bilden:

$f'''(x) = 6$

x^W in f''' einsetzen:

$f'''(x^W) = f'''(2) = 6 \neq 0$

Erläuterung: *Bedingungen für ein Wendepunkt*

Folgende Bedingungen müssen für einen Wendepunkt erfüllt sein:

$f''(x^W) = 0 \quad \text{und} \quad f'''(x^W) \neq 0$

$\Rightarrow N_2(2|0)$ ist Wendepunkt der Funktion f.

Wendetangente

Wendetangente im Punkt $N_2(2|0)$:

$f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 8 = -4$

$f(2) = 0$

Erläuterung: *Wendetangente*

Die Gleichung der Tangente im Punkt x_0 ist gegeben durch:

$t : y = (x - x_0) \cdot f'(x_0) + f(x_0)$

In diesem Fall ist $x_0 = 2, f(2) = 0$ und $f'(2) = -4$.

$y = (x - 2) \cdot f'(2) + f(2)$

$y = (x - 2) \cdot (-4) + 0$

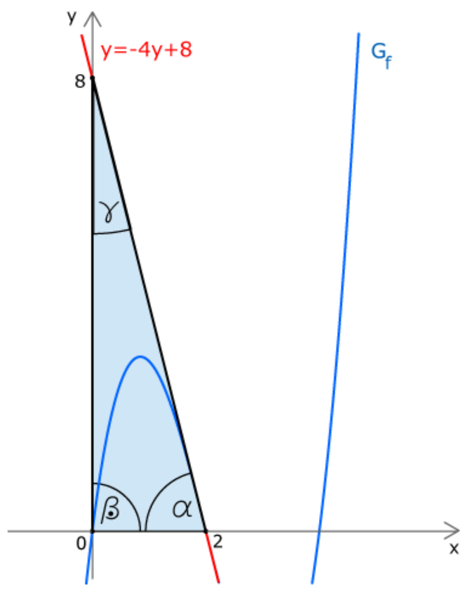
Die Wendetangente am Graphen G_f im Punkt N_2 lautet: $y = -4x + 8$

Teilaufgabe 1c (4 BE)

Die Wendetangente schließt mit den Koordinatenachsen ein Dreieck ein. Bestimmen Sie die Innenwinkel dieses Dreiecks.

Lösung zu Teilaufgabe 1c

Innenwinkel eines Dreiecks



$y = g(x) = -4x + 8$

Erläuterung: *Schnittpunkt mit der x-Achse, Schnittpunkt mit der y-Achse*

Die Länge der Seiten des Dreiecks entsprechen der x-Koordinate der Schnittpunkte der Tangente $g(x)$ mit den Koordinaten-Achsen.

Setzt man $x = 0$ in $g(x)$ ein, so bekommt man den Schnittpunkt mit der y-Achse.

Setzt man $g(x) = 0$, so bekommt man den Schnittpunkt mit der x-Achse.

$g(0) = -4 \cdot 0 + 8 = 8$ Länge der Gegenkathete zum Winkel α

$0 = g(x) \iff -4x + 8 = 0 \Rightarrow x = 2$ Länge der Ankathete zum Winkel α

Erläuterung: *Tangens eines Winkels*

In einem rechtwinkligen Dreieck ist der Tangens eines Winkels α gegeben durch:

$$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

$\tan\alpha = \frac{8}{2} = 4$

$\Rightarrow \alpha = \arctan 4 \approx 75{,}96°$

$\beta = 90°$

Erläuterung: *Winkelsumme im Dreieck*

In einem Dreieck ist die Summe der Innenwinkel α, β und γ stets gleich $180°$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

$\Rightarrow \gamma = 180° - (\alpha + \beta) = 180 - (90 + 75{,}96) = 14{,}04°$

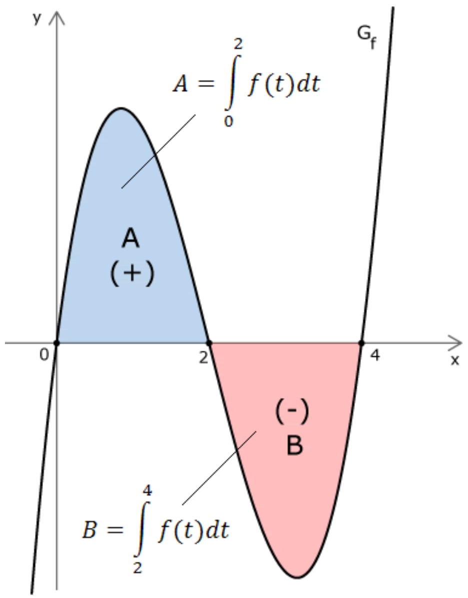
Teilaufgabe 1d (8 BE)

Betrachtet wird nun die Integralfunktion $F : x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$ mit $D_F = \mathbb{R}$.

Berechnen Sie $F(4)$. Was folgt daraus für die beiden Flächenstücke, die der Graph G_f mit der x-Achse im I. und im IV. Quadranten einschließt? Begründen Sie Ihre Antwort. Bestimmen Sie nun die Summe der Inhalte dieser beiden Flächenstücke.

Lösung zu Teilaufgabe 1d

Bestimmtes Integral



$F : x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt,\ D_f = \mathbb{R}$

$f(t) = t^3 - 6t^2 + 8t$

$F(4) = \int_0^4 f(t)\,dt$

$= \int_0^4 \left(t^3 - 6t^2 + 8t\right)\,dt$

Erläuterung: *Stammfunktion*

Für eine Potenzfunktion $f(x) = a \cdot x^n$ mit $a \in \mathbb{R}, n \neq -1$ ist eine Stammfunktion $F(x)$ gegeben durch die Formel:

$$F(x) = \int a \cdot x^n \, d\,x = a \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Bei der obigen Polynomfunktion $f(t)$ wird jeder Summenterm einzeln hochgeleitet und dann addiert.

$$\int t^3 \, d\,t = \frac{t^4}{4}$$

$$\int -6t^2 \, d\,t = \frac{-6t^3}{3}$$

$$\int 8t \, d\,t = \frac{8t^2}{2}$$

$$= \left[\frac{t^4}{4} - \frac{-6t^3}{3} + \frac{8t^2}{2}\right]_0^4 = \left[\frac{t^4}{4} - 2t^3 + 4t^2\right]_0^4$$

Erläuterung: *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*

Ist F eine Stammfunktion von f dann gilt:

$$\int_a^b f(x) d\,x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$= \left(\frac{4^4}{4} - 2 \cdot 4^3 + 4 \cdot 4^2\right) - \underbrace{\left(\frac{0^4}{4} - 2 \cdot 0^3 + 4 \cdot 0^2\right)}_{=0}$$

$$= 64 - 2 \cdot 64 + 64 = 0$$

Verhältnis von Teilflächen

Aus $F(4) = 0$ folgt, dass die Flächenstücke die der Graph G_f mit der x-Achse im I. und IV. Quadranten einschließt gleich groß sind.

Erläuterung: *Bestimmtes Integral*

Das Integral $\int_0^2 f(t) d\,t$ ist gleich der Fläche A die der Graph G_f mit der x-Achse zwischen 0 und 2 einschließt. Der Wert des Integrals ist positiv.

Das Integral $\int_2^4 f(t) d\,t$ ist gleich der Fläche die der Graph G_f mit der x-Achse zwischen 2 und 4 einschließt. Der Wert des Integrals ist negativ.

Die Fläche zwischen 0 und 2 ist ebenso groß positiv, wie die Fläche zwischen 2 und 4 negativ.

Flächenberechnung

$$A = \int_0^2 f(t) d\,t$$

$$= \left[\frac{t^4}{4} - 2t^3 + 4t^2\right]_0^2$$

$$= \frac{2^4}{4} - 2 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^2 - 0$$

$$= 4 - 16 + 16 = 4$$

Erläuterung: *Flächen berechnen*

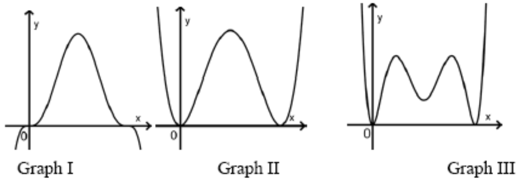
Da beide Flächen gleich groß sind, ist die Gesamtfläche gleich 2 mal die Fläche zwischen 0 und 2.

$$\Rightarrow A + B = 2 \cdot A = 2 \cdot 4 = 8$$

Die Summe der beiden Flächenstücke ist gleich 8.

Teilaufgabe 1e (4 BE)

Einer der drei abgebildeten Graphen I, II oder III stellt den Graphen von F dar. Geben Sie an, welcher dies ist, und begründen Sie Ihre Antwort, indem Sie erklären, warum die beiden anderen Graphen nicht in Betracht kommen.

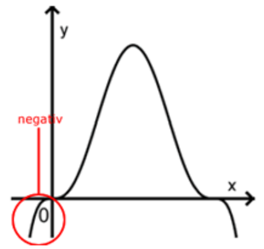


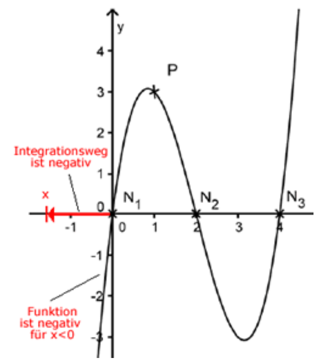
[Lösung zu Teilaufgabe 1e]

Eigenschaften der Integralfunktion

Graph II stellt den Graphen von F dar.

Erläuterung:





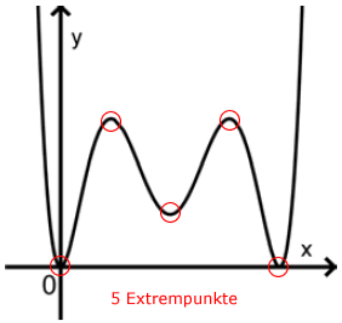
$$\int_0^x f(t)dt = \underbrace{-\underbrace{\int_x^0 f(t)dt}_{<0}}_{>0} > 0 \quad \text{für } x < 0$$

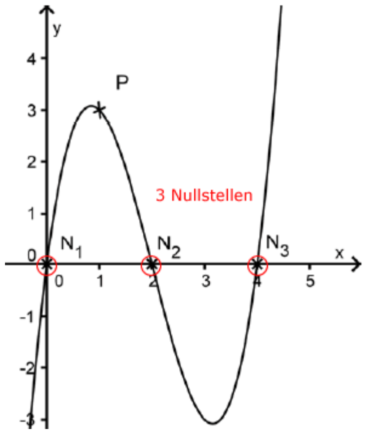
Integriert man die Funktion $f(t)$ von 0 bis zu einem negativen x, so ist der Integrationsweg negativ und G_f ist auch negativ zwischen den Integrationsgrenzen.

$\Rightarrow$ Die Integralfunktion $F(x) = \int_0^x f(t)dt > 0$ ist positiv für $x < 0$.

Graph I ist nicht der Graph der Integralfunktion, da dieser z.B. im III. Quadranten positiv sein muss.

Erläuterung:





Aus $F(x) = \int\limits_0^x f(t)d\,t$ folgt $F(0) = 0$ und $F' = f$.

Hat also $f(x)$ 3 Nullstellen, so hat F' auch höchstens 3 Extrempunkte.

Graph III ist nicht der Graph der Integralfunktion, da f nur 3 Nullstellen hat. Der Graph der Integralfunktion kann also nicht 5 Extrempunkte besitzen.

Teilaufgabe 1f (3 BE)

Bekanntlich ist jede Integralfunktion der Funktion f auch Stammfunktion von f. Begründen Sie, dass jede Integralfunktion mindestens eine Nullstelle hat. Geben Sie den Term einer Stammfunktion von f an, die keine Integralfunktion von f ist.

Lösung zu Teilaufgabe 1f

Eigenschaften der Integralfunktion

Ist $I_a(x) = \int\limits_a^x f(t)d\,t$ eine beliebige Integralfunktion mit $F' = f$, dann gilt nach dem Hauptsatz der Integralrechnung:

$$I_a(x) = \int\limits_a^x f(t)d\,t = F(x) - F(a)$$

Für $x = a$ ist dann $I_a(a) = F(a) - F(a) = 0$, also besitzt jede Integralfunktion mindestens eine Nullstelle.

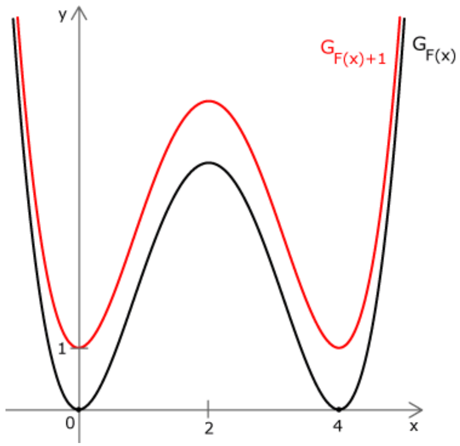
Erläuterung:

Ausgehend von der Integralfunktion $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2$ aus Teilaufgabe 1d) addiert man einen positiven Summanden (z.B +1) der Funktion dazu.

Die Funktion $G(x) = F(x) + 1$ ist weiterhin eine Stammfunktion von $f(x)$, denn:

$G'(x) = [F(x)+1]' = F'(x) = f(x)$

Der Graph G_G von $G(x)$ ist gleich dem Graphen G_F von $F(x)$ um 1 entlang der y-Achse nach oben verschoben.



G_G hat somit keine Nullstellen mehr. Deswegen ist $G(x)$ keine Integralfunktion von $f(x)$.

Eine Stammfunktion von f die keine Integralfunktion von f ist:

$F(x) = \frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2 + 1$

Teilaufgabe 2a (4 BE)

In der Medizin wird radioaktives Jod-123 zur Untersuchung der Schilddrüse eingesetzt. Kurze Zeit nach der Verabreichung dieser Substanz an den Patienten wird die von der Substanz ausgehende Strahlung gemessen, wodurch Rückschlüsse auf den Zustand der Schilddrüse möglich sind.
Durch radioaktiven Zerfall verringert sich die Substanzmasse.
Die im Körper des Patienten noch vorhandene Masse m des verabreichten Jod-123 lässt sich durch den Term $m(t) = m_0 \cdot e^{-k\,t}$ mit $k > 0$ beschreiben. Dabei gibt m_0 die zum Zeitpunkt $t = 0$ verabreichte Jodmasse an; t ist die Maßzahl der seit Verabreichung vergangenen Zeit in Stunden.

Nach einer Zeit von 13,2 Stunden ist nur noch die Hälfte der verabreichten Jodmasse vorhanden. Bestimmen Sie hieraus den Wert des Parameters k.

[Zur Kontrolle: $k \approx 0,0525$]

Lösung zu Teilaufgabe 2a

Exponentielles Wachstum

$m(t) = m_0 \cdot e^{-k\,t}, k > 0$

$t_1 = 13,2$

$m(t_1) = \frac{m_0}{2} = m_0 \cdot e^{-13,2\cdot k}$

$\Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-13,2\cdot k}$

$\Rightarrow \ln\frac{1}{2} = -13,2 \cdot k$

$\Rightarrow k = \frac{\ln\frac{1}{2}}{-13,2} \approx 0,0525$

Teilaufgabe 2b (6 BE)

Wie viel Prozent der verabreichten Jodmasse sind vier Stunden nach Verabreichung im Körper des Patienten noch vorhanden? Wie lange dauert es, bis 90% der verabreichten Jodmasse zerfallen sind?

Lösung zu Teilaufgabe 2b

Exponentielles Wachstum

$m(t) = m_0 \cdot e^{-k\,t}, k > 0$

$k = 0,0525$

$t = 4$

$m(4) = m_0 \cdot e^{-0,0525 \cdot 4} = m_0 \cdot e^{-0,21} = 0,81 \cdot m_0$

$\dfrac{m(4)}{m_0} = 0,81 = 81\%$

Nach 4 Stunden sind noch 81% der verabreichten Jodmasse im Körper vorhanden.

90% von m_0 sollen zerfallen.

Erläuterung:

Wenn 90% zerfallen, dann bleiben 10% von m_0 im Körper.

$10\% m_0 = m_0 \cdot e^{-k\,t} \iff 0,1 = e^{-0,0525 \cdot t}$

$\Rightarrow \ln 0,1 = -0,0525 \cdot t$

$\Rightarrow t = \dfrac{\ln 0,1}{-0,0525} \approx 43,9$

Nach ca. 43,9 Stunden zerfallen 90% der verabreichten Jodmasse.