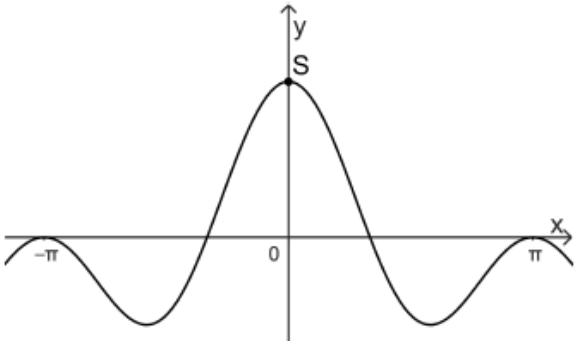
Abitur 2026 Mathematik Infinitesimalrechnung II

Die Abbildung zeigt den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $g : x \mapsto \cos x + \cos(2x)$.



Teilaufgabe Teil A a (1 BE)

Der Graph von g schneidet die y-Achse im Punkt S. Geben Sie die Koordinaten von S an.

Teilaufgabe Teil A b (4 BE)

Zeigen Sie rechnerisch, dass das Integral $\int_0^{\pi} g(x)\mathrm{dx}$ den Wert 0 hat, und deuten Sie diese Tatsache geometrisch.

Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f_a : x \mapsto \frac{1}{4}x^3 + a\,x^2 + a\,x + \frac{1}{4}$ mit $a \in \mathbb{R}$. Der Graph von f_a wird mit G_a bezeichnet. Abbildung 1 zeigt G_a für $a = 0$.

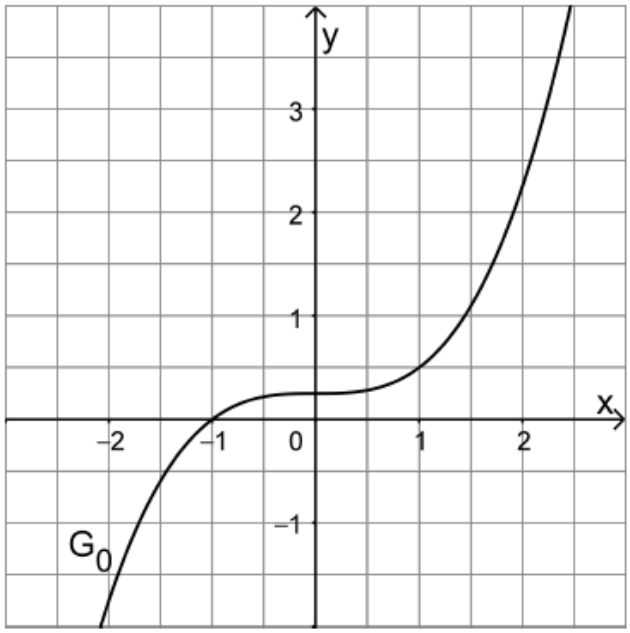


Abb. 1

Teilaufgabe Teil B 1a (5 BE)

Berechnen Sie denjenigen Wert von a, für den der Punkt $(1|-1)$ auf G_a liegt, und zeigen Sie, dass dieser Punkt Wendepunkt dieses Graphen ist.

Teilaufgabe Teil B 1b (4 BE)

Zeigen Sie, dass es genau zwei Punkte gibt, durch die alle Graphen der Schar verlaufen, und bestimmen Sie die Koordinaten dieser beiden Punkte.

Teilaufgabe Teil B 1c (2 BE)

Der Term einer Funktion der Schar kann in der Form $\frac{1}{4} \cdot (x+1)^3$ angegeben werden. Der Graph dieser Funktion kann durch Verschiebungen aus G_0 erzeugt werden. Geben Sie eine passende Möglichkeit für diese Verschiebungen an.

© Abiturloesung.de

Teilaufgabe Teil B 1d (4 BE)

Betrachtet werden für jeden Wert $u > 0$ die Tangente t_u an G_0 im Punkt $P_u\ (u|f_0(u))$ sowie der Punkt $Q_u(u|0)$. Die Tangente t_u schneidet die x-Achse in einem Punkt, der mit T_u bezeichnet wird.

Begründen Sie mithilfe geeigneter Eintragungen in Abbildung 1, dass $\left|\overline{T_u\,Q_u}\right| = \dfrac{f_0(u)}{f_0'(u)}$ für jeden Wert $u > 0$ gilt.

Teilaufgabe Teil B 1e (5 BE)

Es gibt Kreise, deren Mittelpunkte auf der y-Achse liegen und die den Graphen der ersten Ableitungsfunktion von f_0 in genau zwei Punkten berühren. Der Punkt $A\left(1|\frac{3}{4}\right)$ ist ein Berührpunkt eines solchen Kreises. Bestimmen Sie rechnerisch die y-Koordinate des Mittelpunkts dieses Kreises.

Betrachtet wird eine Wasserfontäne, bei der das Wasser aus einer Düse austritt. Die sich periodisch ändernde momentane Durchflussrate des Wassers an der Düse beeinflusst das Erscheinungsbild der Fontäne.

Die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $h : x \mapsto -\dfrac{\pi}{4} \cdot \cos\left(\dfrac{\pi}{3}x\right) + 1$ beschreibt im Folgenden für $x \geq 0$ die zeitliche Entwicklung der momentanen Durchflussrate des Wassers an der Düse. Dabei ist x die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Sekunden und $h(x)$ die momentane Durchflussrate in Litern pro Sekunde. In Abbildung 2 ist der Graph von h dargestellt.

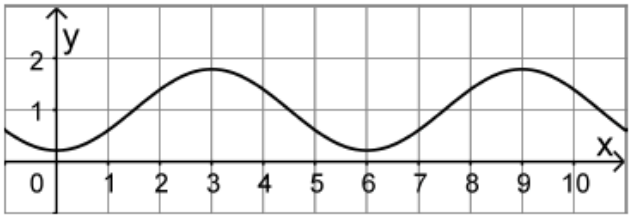


Abb. 2

Teilaufgabe Teil B 2a (3 BE)

Bestimmen Sie, wie oft die momentane Durchflussrate in der ersten Minute nach Beobachtungsbeginn ihren Maximalwert annimmt, und geben Sie einen Zeitpunkt an, zu dem die momentane Durchflussrate am stärksten zunimmt.

Teilaufgabe Teil B 2b (4 BE)

Berechnen Sie $\int_5^9 h(x)\mathrm{dx}$ und interpretieren Sie den Wert des Integrals im Sachzusammenhang.

Teilaufgabe Teil B 2c (3 BE)

Betrachtet wird nun eine andere Düse, bei der sich die momentane Durchflussrate ebenfalls periodisch mit der Zeit ändert. Die maximale momentane Durchflussrate beträgt 2 Liter pro Sekunde und die Zeitspanne zwischen zwei aufeinanderfolgenden Maximalwerten der momentanen Durchflussrate ist 1,5-mal so groß wie bei der zuerst betrachteten Düse. Skizzieren Sie dazu passend in Abbildung 2 einen Graphen, der für $x \geq 0$ eine mögliche zeitliche Entwicklung der momentanen Durchflussrate des Wassers für die nun betrachtete Düse beschreibt.

© Abiturloesung.de