Abitur 2026 Mathematik Infinitesimalrechnung I

Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto \dfrac{x}{\ln x}$ mit maximalem Definitionsbereich D.

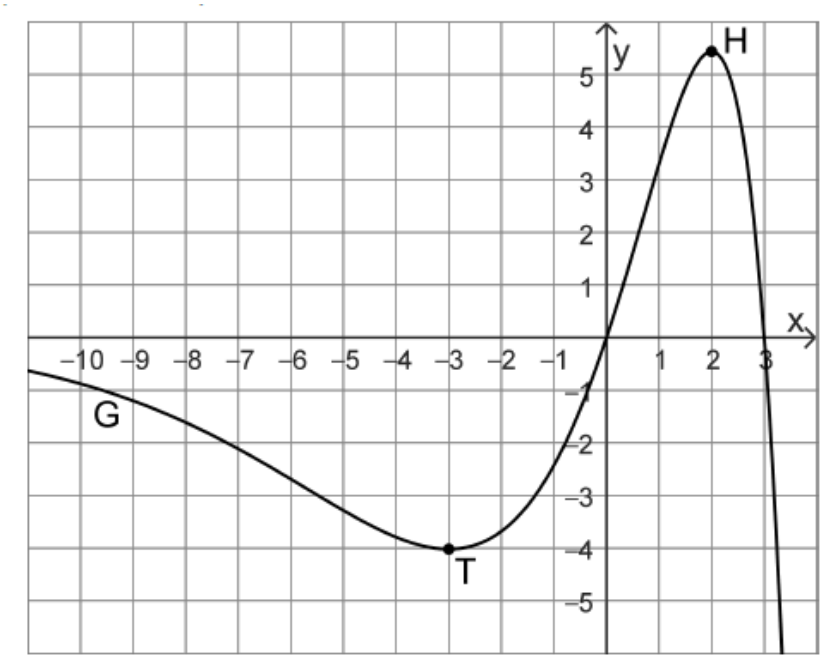
Teilaufgabe Teil A a (2 BE)

Begründen Sie, dass $D = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ gilt.

Teilaufgabe Teil A b (3 BE)

Der Graph von f besitzt in genau einem Punkt eine waagrechte Tangente.
Berechnen Sie die x-Koordinate dieses Punkts.

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f : x \mapsto \left(-x^2 + 3x\right) \cdot e^{\frac{1}{2}x}$. Die Abbildung zeigt ihren Graphen G, der genau zwei Extrempunkte besitzt: den Tiefpunkt $T\left(-3 \mid -18e^{-\frac{3}{2}}\right)$ und den Hochpunkt H.



Teilaufgabe Teil B a (3 BE)

Es gilt $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$. Deuten Sie diese Tatsache geometrisch und berechnen Sie die Nullstellen von f.

Teilaufgabe Teil B b (6 BE)

Berechnen Sie die Koordinaten von H. Geben Sie die Wertemenge von f an und begründen Sie Ihre Angabe.

[zur Kontrolle: $f'(x) = \left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 3\right) \cdot e^{\frac{1}{2}x}$; $H(2|2e)$]

Teilaufgabe Teil B c (4 BE)

Ermitteln Sie die Größe des Winkels, unter dem sich die Tangente an G im Koordinatenursprung und die Gerade durch T und H schneiden.

Teilaufgabe Teil B d (2 BE)

Die erste Ableitungsfunktion von f besitzt ein globales Maximum. Beschreiben Sie, wie man dieses Maximum berechnen kann.

Die beim Abbremsen eines Elektroautos frei werdende Energie kann teilweise genutzt werden, um der Batterie des Elektroautos wieder Energie zuzuführen. Über einen Zeitraum von 13 Sekunden, beginnend zehn Sekunden vor Beginn eines Bremsvorgangs, wird der Ladezustand der Batterie eines Elektroautos beobachtet. Die Funktion f beschreibt für $x \in [-10; 3]$ modellhaft die momentane Änderungsrate der in der Batterie gespeicherten Energie. Der Betrag von x gibt den zeitlichen Abstand zum Beginn des Bremsvorgangs in Sekunden an; negative x-Werte beziehen sich auf Zeitpunkte vor Beginn des Bremsvorgangs. $f(x)$ ist die momentane Änderungsrate der in der Batterie gespeicherten Energie in Kilojoule pro Sekunde.

Teilaufgabe Teil B e (2 BE)

Geben Sie im Sachzusammenhang die Bedeutung des Hochpunkts H unter Berücksichtigung seiner Koordinaten an.

Teilaufgabe Teil B f (2 BE)

Bestimmen Sie mithilfe der Abbildung die Länge der Zeitspanne auf Sekunden genau, in der der Batterie mindestens drei Kilojoule pro Sekunde entnommen werden.

Teilaufgabe Teil B g (2 BE)

Es gilt $\int_{-10}^{3} f(x)dx \approx -15$. Interpretieren Sie den Wert des Integrals im Sachzusammenhang.

Betrachtet wird die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $g_a : x \mapsto -f(x) + a$ mit $a \in \mathbb{R}$. Der Graph von g_a wird mit G_a bezeichnet.

© Abiturloesung.de

Teilaufgabe Teil B h (3 BE)

Zeichnen Sie G_0 in die Abbildung ein. Geben Sie an, wie G_a für $a > 0$ aus G_0 hervorgeht.

Teilaufgabe Teil B i (3 BE)

Geben Sie diejenigen Werte von a an, für die G_a und G genau zwei Schnittpunkte besitzen.

Teilaufgabe Teil B j (3 BE)

Betrachtet wird nun die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $g_{a,b} : x \mapsto -f(b\,x) + a$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ermitteln Sie a und b so, dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

I Der Graph von $g_{a,b}$ hat die Gerade mit der Gleichung $y = 2$ als Asymptote.

II Die x-Koordinate des Tiefpunkts des Graphen von $g_{a,b}$ ist $-0,5$.