Abitur 2025 Mathematik Infinitesimalrechnung II

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 1$.

Teilaufgabe Teil A 1a (2 BE)

Zeichnen Sie den Graphen von f für $-3 \leq x \leq 3$ in ein Koordinatensystem ein.

Teilaufgabe Teil A 1b (3 BE)

Es gibt genau eine positive reelle Zahl a, für die das Integral $\int\limits_0^a f(x)\,\mathrm{dx}$ den Wert 0 hat.

Berechnen Sie a.

Betrachtet wird eine in $\mathbb{R}$ definierte ganzrationale Funktion g.

Teilaufgabe Teil A 2a (2 BE)

Beschreiben Sie, wie man rechnerisch nachweisen kann, dass 2 eine Wendestelle von g ist.

Teilaufgabe Teil A 2b (3 BE)

Der Punkt $(2|3)$ ist der einzige Wendepunkt des Graphen von g. Die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion h ist gegeben durch $h(x) = g(2x) - 1$.
Geben Sie die Koordinaten des Wendepunkts des Graphen von h an und begründen Sie Ihre Angabe.

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x$.

Teilaufgabe Teil A 3a (2 BE)

Für die zweite Ableitungsfunktion von f gilt $f''(2) \neq 0$. Zeigen Sie, dass 2 eine Extremstelle von f ist.

Teilaufgabe Teil A 3b (3 BE)

Einer der Graphen I und II in Abbildung 1 ist der Graph einer Stammfunktion von f. Geben Sie diesen Graphen an und begründen Sie ihre Angabe.

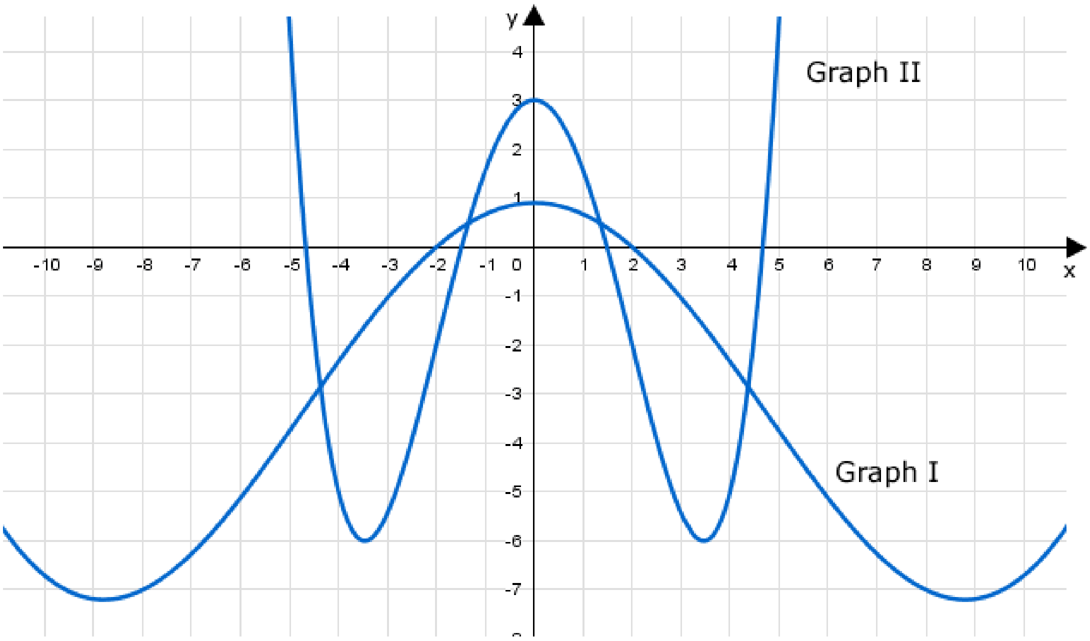


Abb. 1

Gegeben ist die Funktion $g : x \mapsto \sqrt{x-2}$ mit $x \in [2; +\infty[$. Abbildung 2 zeigt den Graphen G von g sowie den Punkt $P(3|1)$. Die Gerade mit der Gleichung $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ ist die Tangente an G im Punkt P und hat mit G nur Punkt P gemeinsam.

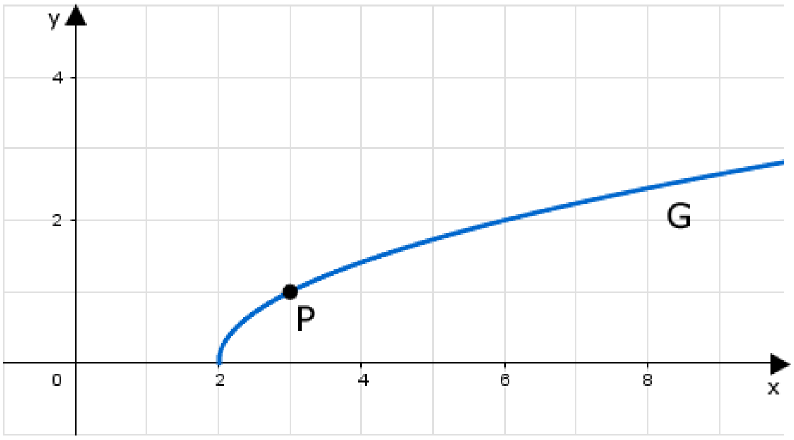


Abb.2

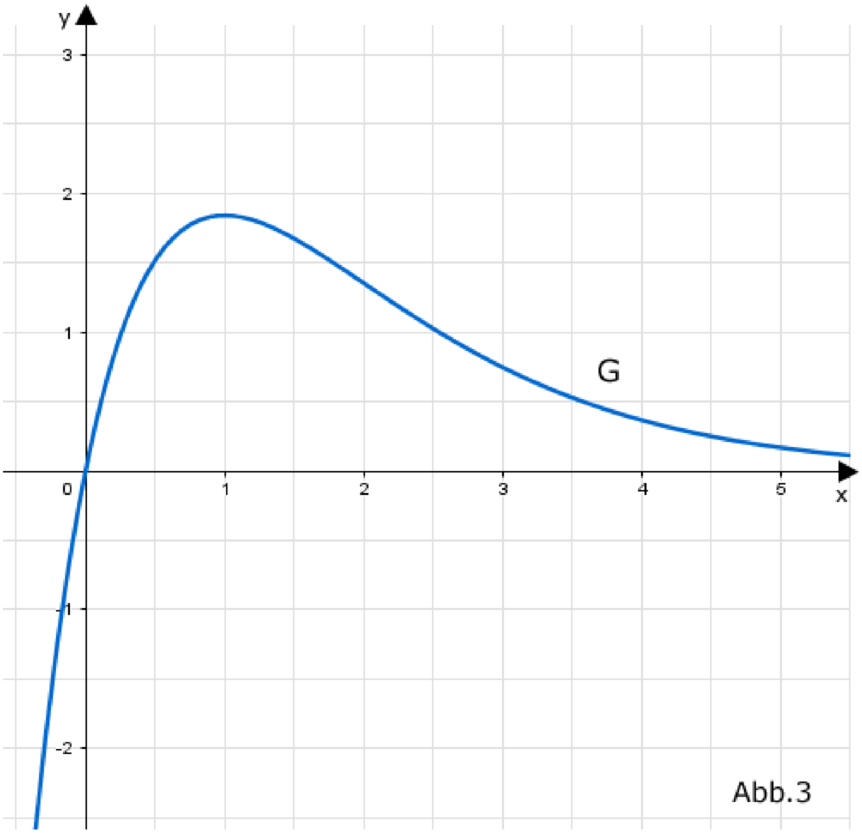
Teilaufgabe Teil A 4a (1 BE)

Zeichnen Sie die Tangente in Abbildung 2 ein.

Teilaufgabe Teil A 4b (4 BE)

Betrachtet wird eine Gerade, die mit G sowohl den Punkt P als auch einen weiteren Punkt gemeinsam hat. Geben Sie alle möglichen Steigungen dieser Gerade an.

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f : x \mapsto 5x \cdot e^{-x}$. Abbildung 3 zeigt den Graphen G von f.



Teilaufgabe Teil B 1a (4 BE)

G hat genau einen Extrempunkt. Berechnen Sie die Koordinaten des Extrempunkts von G.
(zur Kontrolle: $\left(1|\frac{5}{e}\right)$)

Teilaufgabe Teil B 1b (3 BE)

Die Tangente t an G in dessen Wendepunkt hat die Gleichung $y = -\frac{5}{e^2}x + \frac{20}{e^2}$. Ermitteln Sie eine Gleichung der Gerade, die den Extrempunkt von G enthält und senkrecht zu t verläuft.

Betrachtet wird die in $[1; +\infty[$ definierte Funktion h mit $h(x) = f(x)$.

Teilaufgabe Teil B 1c (6 BE)

Begründen Sie, dass die Funktion f nicht umkehrbar, die Funktion h jedoch umkehrbar ist. Geben Sie den Definitions- und den Wertebereich der Umkehrfunktion von h an.

Abbildung 4 zeigt eine Figur, die modellhaft das Wappen eines Sportvereins beschreibt. Die Begrenzungslinien der Figur werden durch einen Teil der Gerade mit der Gleichung $y = 5$ sowie durch die Kurvenstücke H_1 und H_2 beschrieben:

- H_1 entsteht, indem G für $x \in [\ln 5; 5]$an der Gerade mit der Gleichung $y = x$ gespiegelt wird.
- H_2 entsteht durch Spiegeln von H_1 an der Gerade mit der Gleichung $x = \ln 5$.

Der Punkt $S(\ln 5|\ln 5)$ ist gemeinsamer Punkt von H_1 und H_2.

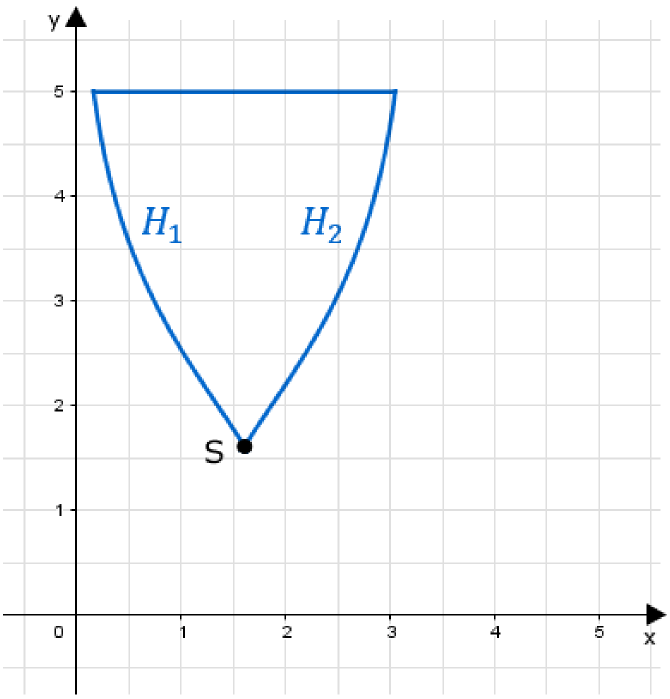


Abb. 4

Teilaufgabe Teil B 1d (5 BE)

Begründen Sie, dass mit dem Term $2 \cdot \left((5 - \ln 5) \cdot \ln 5 - \int\limits_{\ln 5}^{5} f(x)\ \mathrm{dx} \right)$ der Flächeninhalt der Figur berechnet werden kann.

Teilaufgabe Teil B 1e (3 BE)

Die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $F : x \mapsto -5(x+1) \cdot e^{-x}$ ist eine Stammfunktion von f. Berechnen Sie mit dem Term aus Aufgabe 1d den Flächeninhalt der Figur auf eine Nachkommastelle genau.

Betrachtet wird die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $g_k : x \mapsto -5x \cdot e^{-k\,x}$ mit $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Abbildung 5 zeigt vier Graphen der Schar, die zu den Werten $k = -1, k = -0,5, k = 0,5$ und $k = 1$ gehören.

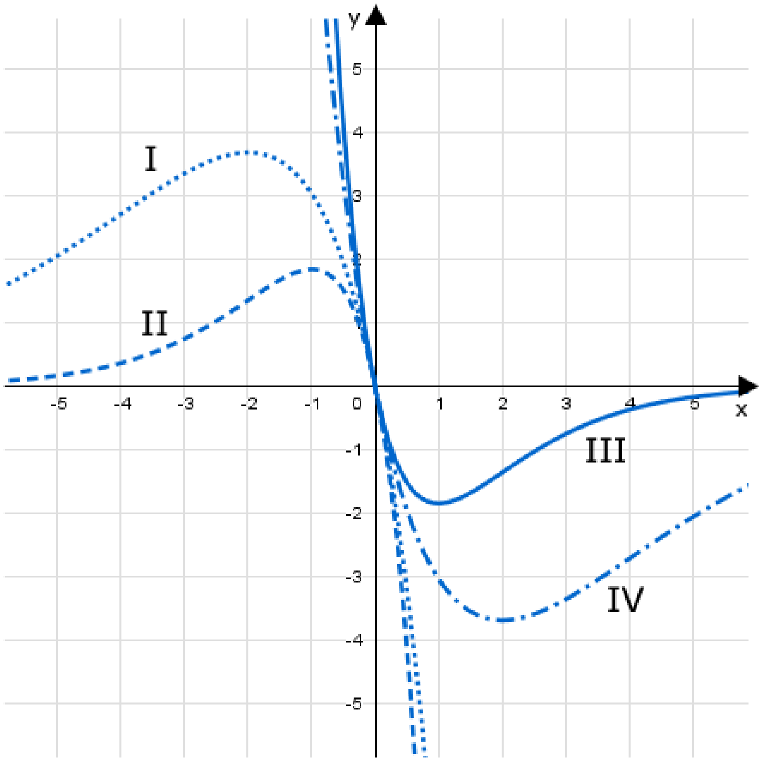


Abb. 5

Teilaufgabe Teil B 2a (5 BE)

Der Graph III kann durch Spiegeln von G (vgl. Abbildung 1) an der $x-$Achse erzeugt werden. Geben Sie den zugehörigen Wert von k sowie die Koordinaten des Tiefpunkts von Graph III an. Ordnen Sie den drei übrigen Werten von k den jeweils passenden Graphen zu.

Teilaufgabe Teil B 2b (4 BE)

Zeigen Sie, dass $g_k(-x) = -g_{-k}(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, und interpretieren Sie diese Gleichung mit Blick auf die Graphen der Funktionen g_k und g_{-k}.