Abitur 2025 Mathematik Infinitesimalrechnung I

Gegeben ist die in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definierte Funktion $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2} + 1$.

Teilaufgabe Teil A 1a (2 BE)

Geben Sie eine Gleichung der senkrechten und eine Gleichung der waagrechten Asymptote des Graphen von f an.

Teilaufgabe Teil A 1b (3 BE)

Berechnen Sie den Wert des Integrals $\int\limits_1^2 f(x)\ \mathrm{dx}$.

Teilaufgabe Teil A 2 (5 BE)

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $g : x \mapsto x^2 - e^x$. Der Graph von g besitzt genau einen Wendepunkt W. Bestimmen Sie rechnerisch die $x-$Koordinate von W und beurteilen Sie, ob W oberhalb der $x-$Achse liegt.

Abbildung 1 zeigt den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f mit $f(x) = 3 \cdot \cos(x)$.

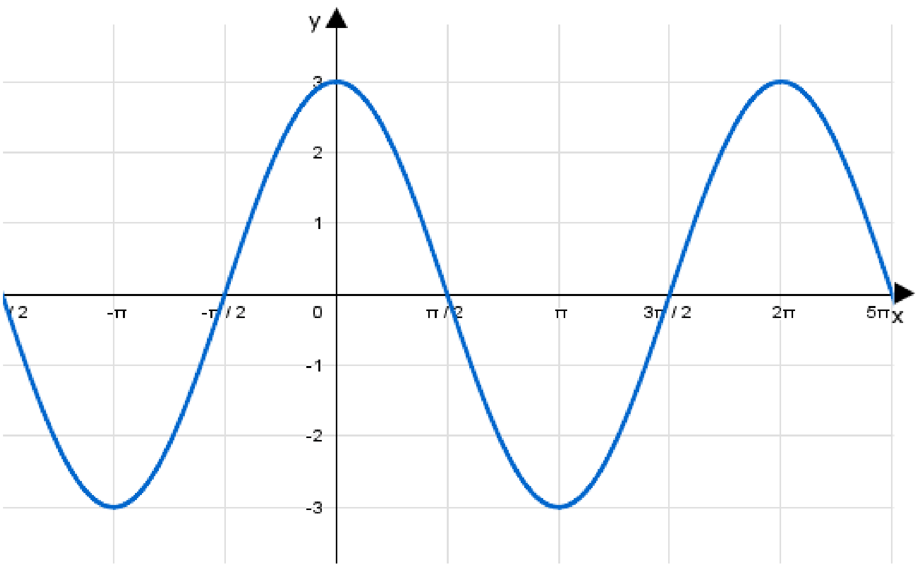


Abb. 1

Teilaufgabe Teil A 3a (1 BE)

Geben Sie den Wert des Integrals $\int\limits_0^{\pi} f(x)\ \mathrm{dx}$ an.

Teilaufgabe Teil A 3b (4 BE)

Die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion g ist gegeben durch $g(x) = a \cdot f(x) + b \cdot x$ mit reellen Zahlen a und b. Die Punkte $(0|-3)$ und $\left(\frac{\pi}{2}|\frac{3}{4}\pi\right)$ liegen auf dem Graphen von g. Ermitteln Sie a und b.

Teilaufgabe Teil A 4 (5 BE)

Gegeben sind die in $\mathbb{R}_0^+$ definierten Funktion f und g, wobei g die Umkehrfunktion von f ist. Abbildung 2 zeigt den Graphen G_f von f und G_g von g. G_f und G_g schneiden sich nur im Koordinatenurspung und im Punkt $(x_S|f(x_S))$. Beurteilen Sie die folgende Aussage:

$$\int\limits_0^{x_S} (g(x) - f(x))\ \mathrm{dx} = 2 \cdot \int\limits_0^{x_S} (x - f(x))\ \mathrm{dx}$$

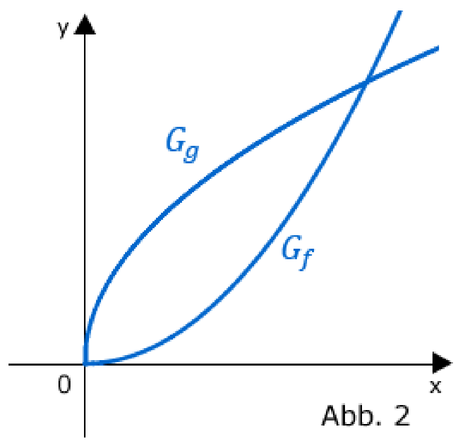
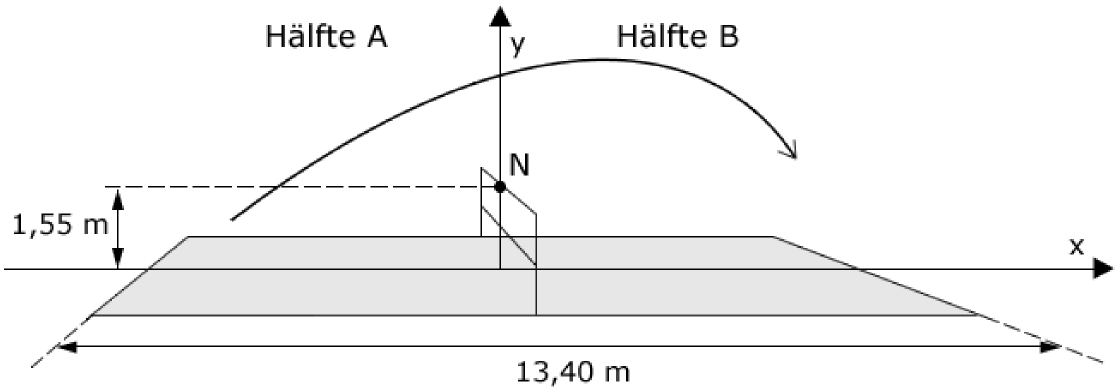


Abb. 2

Badminton wird auf einem rechteckigen Spielfeld gespielt, das $13,40$ m lang ist. Dabei wird ein Federball über ein $1,55$ m hohes Netz geschlagen (vgl. Abbildung).



Im Folgenden werden Flugbahnen von Federbällen, die von Hälfte A in Hälfte B des Spielfelds geschlagen werden, modellhaft mithilfe von Funktionen beschrieben. Vereinfachend werden nur Flugbahnen betrachtet, die innerhalb einer Ebene verlaufen, die senkrecht zum horizontalen Boden und parallel zur Seitenlinie des Spielfelds ist. Das im Modell verwendete Koordinatensystem liegt in dieser Ebene, wobei die $x-$Achse den Boden und der Punkt N $(0|1,55)$ die horizontal verlaufende Oberkante des Netzes beschreibt. Eine Längeneinheit entspricht einem Meter in der Wirklichkeit.

Die in $]-\infty;6]$ definierte Funktion $f: x \mapsto 0,25 \cdot (x+6) \cdot \sqrt{6-x}$ beschreibt für $-5 \leq x \leq 6$ die Flugbahn bei einem bestimmten Schlag.

Teilaufgabe Teil B 1a (2 BE)

Geben Sie die Koordinaten des Schnittpunkts des Graphen von f mit der $y-$Achse an und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

Teilaufgabe Teil B 1b (4 BE)

Begründen Sie, dass der Federball bei diesem Schlag innerhalb von Hälfte B auf dem Boden auftrifft, wenn die Flugbahn nicht unterbrochen wird. Ein Spieler steht 3 m hinter dem Netz in Hälfte B unterhalb der Flugbahn des Federballs. Berechnen Sie die Höhe des Federballs über dem Boden an dieser Stelle.

Teilaufgabe Teil B 1c (6 BE)

Weisen Sie nach, dass $\frac{6-3x}{8\cdot\sqrt{6-x}}$ ein Term der ersten Ableitungsfunktion f' von f ist. Ermitteln Sie $\lim\limits_{x\to 6} f'(x)$ und deuten Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

Teilaufgabe Teil B 1d (2 BE)

Im Verlauf des Flugs erreicht der Federball eine maximale Höhe. Berechnen Sie diese.

Bei einem anderen Schlag wird die Flugbahn des Federballs für $-0,25 \leq x \leq 1$ mithilfe der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $g: x \mapsto -2x+2$ beschrieben.

Teilaufgabe Teil B 2a (5 BE)

Zeigen Sie unter Verwendung einer geeigneten Skizze, dass die Entfernung eines beliebigen Punkts $Q\ (x|g(x))$ auf dem Graphen von g zum Punkt $N\ (0|1,55)$ durch den Term $d(x)=\sqrt{5x^2-1,8x+0,2025}$ beschrieben werden kann.

Teilaufgabe Teil B 2b (3 BE)

Auf dieser Flugbahn gibt es einen Punkt mit minimalem Abstand zur oberen Netzkante. Berechnen Sie diesen minimalen Abstand.

Im Folgenden werden Schläge betrachtet, bei denen die Flugbahn des Federballs jeweils mithilfe einer Funktion $h: x \mapsto a\cdot\sqrt{b-x}+c$ mit maximalem Definitionsbereich und $a,b,c \in \mathbb{R}$ beschrieben wird.

Teilaufgabe Teil B 3a (4 BE)

Ermitteln Sie für $a=2, b=5$ und $c=-2$ in welcher Entfernung zur Netzebene und unter welchem Winkel der Federball auf dem Boden auftrifft.

Teilaufgabe Teil B 3b (4 BE)

Ein Federball wird von einem Spieler in Hälfte A im Abstand von 1 m zur Netzebene in einer Höhe von $2,60$ m geschlagen und trifft im Abstand von 3 m zur Netzebene in Hälfte B senkrecht zum Boden auf diesem auf.
Ermitteln Sie die zugehörigen Werte von a, b und c.