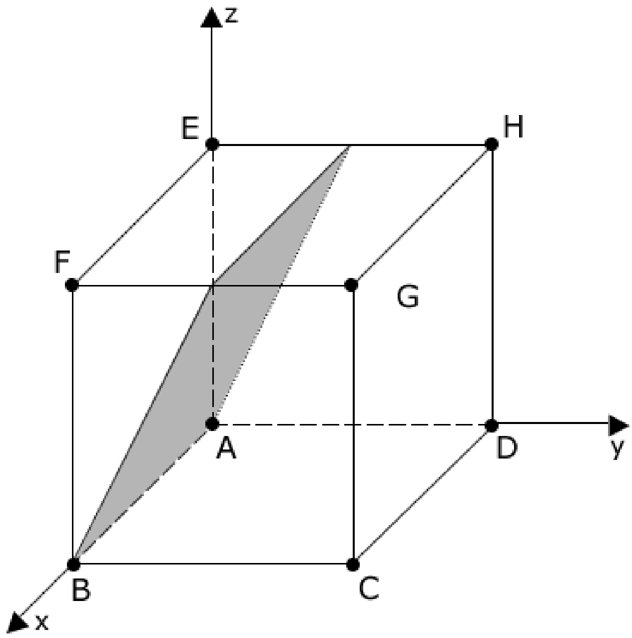
Abitur 2025 Mathematik Geometrie VI

Die Abbildung zeigt einen Würfel ABCDEFGH der Kantenlänge 4 in einem Koordinatensystem. Drei Seitenflächen dieses Würfels liegen in Koordinatenebenen.
Die Ebene K enthält die Punkte $A(0|0|0)$, $B(4|0|0)$ und den Mittelpunkt der Kante [FG].



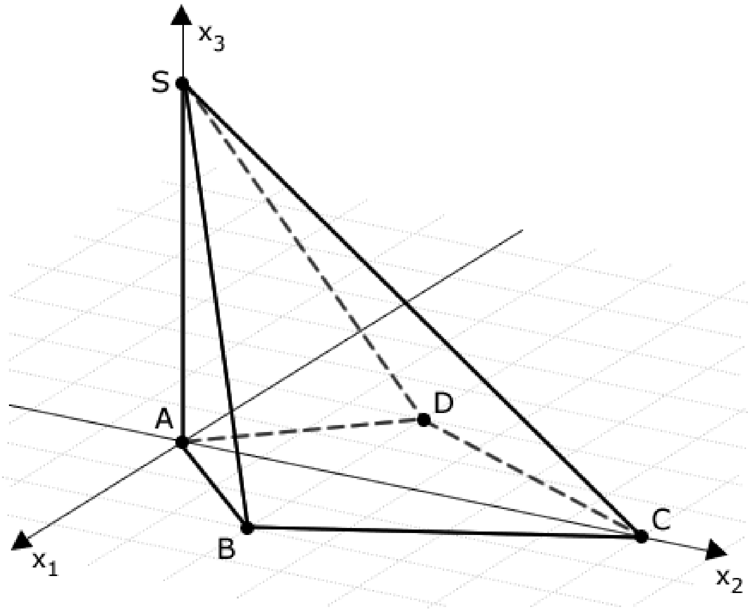
Teilaufgabe Teil A a (2 BE)

Die Ebene K teilt den Würfel in zwei Teilkörper. Berechnen Sie das Volumen des kleineren Teilkörpers.

Teilaufgabe Teil A b (3 BE)

Eine zweite Ebene L enthält die Punkte E und F sowie den Mittelpunkt der Kante [BC]. Zeichnen Sie die Schnittfigur dieser Ebene mit dem Würfel in die Abbildung ein und geben Sie eine Gleichung der Schnittgerade der Ebenen K und L an.

Die Abbildung zeigt die Pyramide ABCDS. Ihre Grundfläche ABCD ist ein Drachenviereck mit den Eckpunkten $A(0|0|0)$, $B(2|2|0)$, $C(0|6|0)$ und $D(-2|2|0)$. Der Punkt $S(0|0|6)$ ist die Spitze der Pyramide.



Teilaufgabe Teil B a (4 BE)

Berechnen Sie die kleinste Kantenlänge sowie das Volumen der Pyramide ABCDS.

Die Seitenfläche BCS der Pyramide liegt in der Ebene E.

Teilaufgabe Teil B b (3 BE)

Betrachtet werden die Vektoren $\overrightarrow{n}$, deren Koordinaten nicht alle gleich null sind. Begründen Sie, dass folgende Aussage richtig ist:

Gilt für einen solchen Vektor $\overrightarrow{n} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ und $\overrightarrow{n} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$ so ist er ein Normalenvektor von E.

Teilaufgabe Teil B c (3 BE)

Die Ebene E hat die Gleichung $2x_1 + x_2 + x_3 = 6$. Bestimmen Sie die Größe des Winkels, den E mit der $x_1 x_2-$Ebene einschließt.

Gegeben ist die Schar der Ebenen $F_k : k \cdot x_2 + (k-2) \cdot x_3 = 2k$ mit $k \in]0;3[$. Jede Ebene F_k der Schar schneidet die Pyramide ABCDS in einem Dreieck BDQ$_k$, wobei der Punkt Q_k auf der Strecke [SC] liegt.

Teilaufgabe Teil B d (4 BE)

Geben Sie eine Gleichung der Ebene F_2 an und zeichnen Sie in die Abbildung die Schnittfigur von F_2 mit der Pyramide ABCDS ein.

Teilaufgabe Teil B e (6 BE)

Es gibt einen Wert von k, für den der Flächeninhalt des Dreiecks BDQ$_k$ minimal ist. Ermitteln Sie diesen Wert.