Abitur 2024 Mathematik Infinitesimalrechnung II

Gegeben ist die in $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ definierte Funktion $f : x \mapsto \frac{x^2 - 9}{x + 2}$.

Teilaufgabe Teil A 1a (2 BE)

Geben Sie die Nullstellen von f sowie die Koordinaten des Schnittpunkts des Graphen von f mit der y-Achse an.

Teilaufgabe Teil A 1b (2 BE)

Geben Sie das Verhalten von f für $x \to -\infty$ sowie für $x \to +\infty$ an.

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion g mit $g(x) = x^3 + x^2$. Abbildung 1 zeigt den Graphen von g.

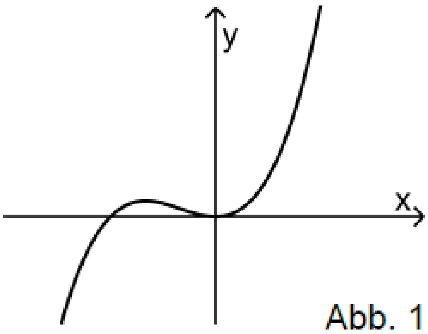


Abb. 1

Teilaufgabe Teil A 2a (1 BE)

Geben Sie einen Term der ersten Ableitungsfunktion von g an.

Teilaufgabe Teil A 2b (4 BE)

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph von g mit der x- Achse einschließt.

Gegeben ist die in $[-3; +\infty[$ definierte Funktion $h : x \mapsto \sqrt{x+3} - 2$.

Teilaufgabe Teil A 3a (2 BE)

Beschreiben Sie, wie der Graph von h aus dem Graphen der in $\mathbb{R}_0^+$ definierten Funktion $w : x \mapsto \sqrt{x}$ hervorgeht.

Teilaufgabe Teil A 3b (4 BE)

Begründen Sie, dass h umkehrbar ist, und beschreiben Sie, wie der Graph der Umkehrfunktion h^{-1} von h aus dem Graphen von h hervorgeht.
Geben Sie den Definitions- und den Wertebereich von h^{-1} an.

Gegeben ist für jede positive reelle Zahl a die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f_a mit $f_a(x) = a\,x^2$. Abbildung 2 zeigt den Graphen von $f_{\frac{1}{2}}$ sowie die Tangente t an den Graphen von $f_{\frac{1}{2}}$ im Punkt $\left(4|f_{\frac{1}{2}}(4)\right)$.

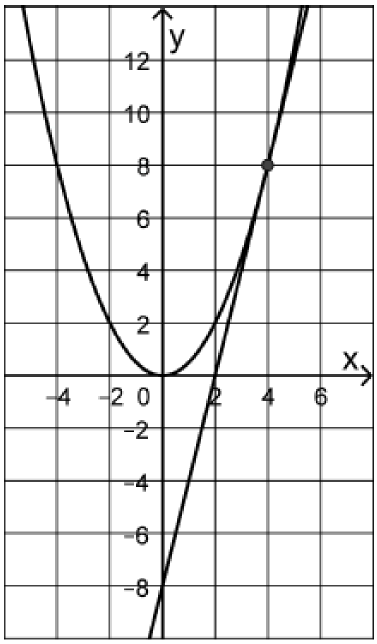


Abb. 2

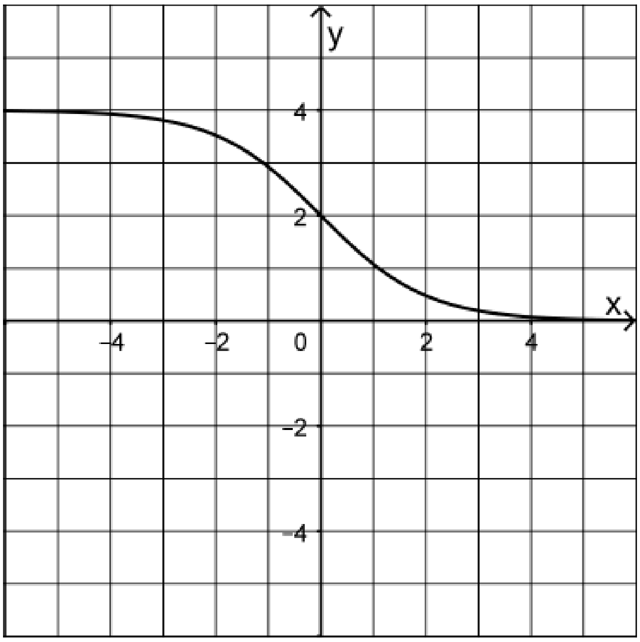
Teilaufgabe Teil A 4a (1 BE)

Geben Sie anhand von Abbildung 2 eine Gleichung der Tangente t an.

Teilaufgabe Teil A 4b (4 BE)

Weisen Sie nach, dass für jeden Wert $u \in \mathbb{R}$ die Tangente an den Graphen von f_a im Punkt $(u|f_a(u))$ die y-Achse im Punkt $(0| - f_a(u))$ schneidet.

Die Abbildung zeigt den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $f : x \mapsto \frac{4}{1+e^x}$. Der Graph ist symmetrisch bezüglich seines Wendepunkts $(0|2)$.



Teilaufgabe Teil B 1a (3 BE)

Begründen Sie anhand des Funktionsterms von f, dass f keine Nullstelle hat, und geben Sie $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ sowie $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ an.

Teilaufgabe Teil B 1b (5 BE)

Berechnen Sie die mittlere Steigung des Graphen von f im Bereich $-1 \leq x \leq 1$ auf Hundertstel genau und bestimmen Sie grafisch die Steigung des Graphen von f in seinem Wendepunkt.

Teilaufgabe Teil B 1c (3 BE)

Für die in $\mathbb{R}$ definierte erste Ableitungsfunktion f' von f gilt $f'(-x) = f'(x)$. Geben Sie die Bedeutung dieser Tatsache im Hinblick auf den Verlauf des Graphen von f' an und skizzieren Sie in der Abbildung den Graphen von f'.

Betrachtet wird die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $F : x \mapsto 4x - 4 \cdot \ln\left(e^x + 1\right)$.

Teilaufgabe Teil B 1d (3 BE)

Zeigen Sie, dass die Funktion F eine Stammfunktion von f ist.

Teilaufgabe Teil B 1e (3 BE)

Beurteilen Sie die folgende Aussage:

Der Graph von F verläuft vollständig unterhalb der x-Achse.

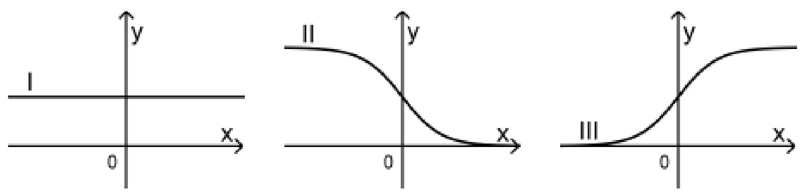
Teilaufgabe Teil B 1f (4 BE)

Begründen Sie, dass der Wert des Integrals $\int\limits_{-k}^{k} f(x)\ \mathrm{dx}$ für jede positive reelle Zahl k ohne Verwendung einer Stammfunktion von f exakt bestimmt werden kann, und geben Sie den Wert des Integrals an.

Betrachtet wird die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $w_{\mathrm{a;b;c}} : x \mapsto \dfrac{a}{b + e^{c\,x}}$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$ und $c \in \mathbb{R}$. Die Funktion aus Aufgabe 1 ist eine Funktion dieser Schar.

Teilaufgabe Teil B 2a (4 BE)

Jeder der abgebildeten Graphen I, II und III der Schar gehört, bei festen Werten von a und b, zu einem der Werte $c = -1$, $c = 0$ und $c = 1$.



Ordnen Sie den Graphen die genannten Werte von c zu und begründen Sie Ihre Zuordnung.

Auf einer Inselgruppe wurden Seeadler neu angesiedelt. Betrachtet wird die anschließende Entwicklung der Anzahl der Seeadler. In einem Modell wird diese Entwicklung mithilfe des Graphen der Funktion $w_{40;1;\text{-}0,2}$ beschrieben, die im Folgenden mit w bezeichnet wird. Es gilt also $w(x) = \dfrac{40}{1 + e^{-0,2x}}$. Dabei ist x die seit der Ansiedlung vergangene Zeit in Jahren und $w(x)$ die Anzahl der Seeadler.

Teilaufgabe Teil B 2b (4 BE)

Geben Sie auf Grundlage des Modells an, wie viele Seeadler angesiedelt wurden, und berechnen Sie, nach wie vielen Jahren die Anzahl der Seeadler auf 32 angewachsen ist.

Teilaufgabe Teil B 2c (3 BE)

Die Tangente an den Graphen von w im Punkt $(0|w(0))$ hat die Steigung 2. Würde die Entwicklung der Anzahl der Seeadler im Modell mithilfe dieser Tangente beschrieben werden, so ergäbe sich für den Zeitpunkt vier Jahre nach der Ansiedlung eine bestimmte Anzahl von Seeadlern. Untersuchen Sie, ob diese Anzahl mit derjenigen übereinstimmt, die sich bei einer Beschreibung mithilfe des Graphen von w ergeben würde.

Unter bestimmten anderen Gegebenheiten auf der Inselgruppe kann die Entwicklung der Anzahl der Seeadler im Modell mithilfe des Graphen einer anderen Funktion aus der Schar der Funktionen $w_{\mathrm{a;b;c}}$ beschrieben werden. Das folgende Gleichungssystem ermöglicht die Bestimmung der zugehörigen Werte von a, b und c.

(1) $\dfrac{a}{b+1} = 20$ (2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{a}{b+e^{c\,x}} = 45$ (3) $\dfrac{a}{b+e^{15c}} = 35$

Teilaufgabe Teil B 2d (3 BE)

Interpretieren Sie jede der drei Gleichungen im Sachzusammenhang.

Teilaufgabe Teil B 2e (5 BE)

Ermitteln Sie die Werte von a und b.