Abitur 2024 Mathematik Infinitesimalrechnung I

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f : x \mapsto 8x^3 + 3x$ mit der Ableitungsfunktion f'.

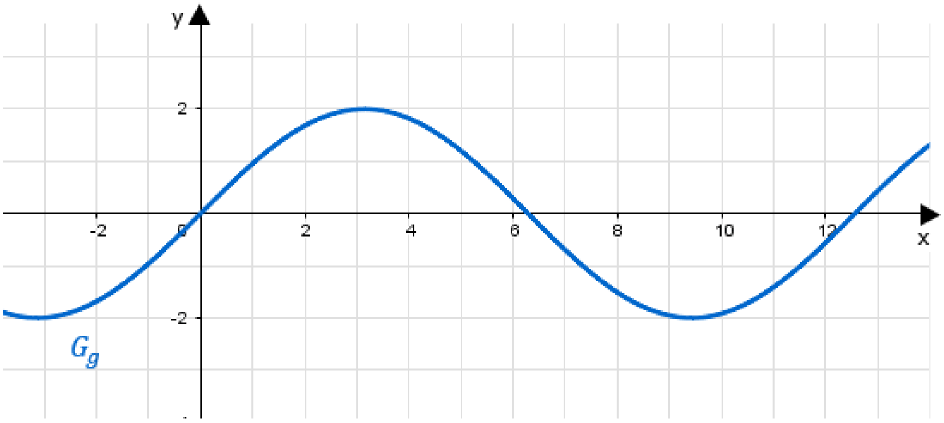
Teilaufgabe Teil A 1a (2 BE)

Berechnen Sie $f'(1)$.

Teilaufgabe Teil A 1b (3 BE)

Bestimmen Sie einen Term derjenigen Stammfunktion F von f, deren Graph durch den Punkt $(-1|5)$ verläuft.

Die Abbildung zeigt den Graphen G_g der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion g mit $g(x) = 2 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$.



Teilaufgabe Teil A 2a (2 BE)

Beurteilen Sie mithilfe der Abbildung, ob der Wert des Integrals $\int_{-2}^{8} g(x)\ \mathrm{dx}$ negativ ist.

Teilaufgabe Teil A 2b (3 BE)

Weisen Sie rechnerisch nach, dass die folgende Aussage zutrifft:
Die Tangente an G_g im Koordinatenursprung ist die Gerade durch die Punkte $(-1|-1)$ *und* $(1|1)$.

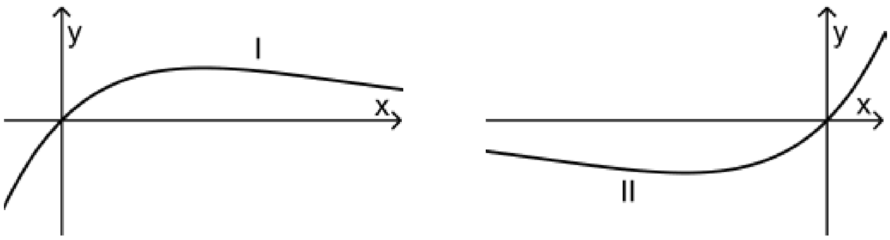
Betrachtet wird die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f_a mit $f_a(x) = x \cdot e^{a\,x}$ und $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Für jeden Wert von a besitzt die Funktion f_a genau eine Extremstelle.

Teilaufgabe Teil A 3a (2 BE)

Begründen Sie, dass der Graph von f_a für $x < 0$ unterhalb der x-Achse verläuft.

Teilaufgabe Teil A 3b (3 BE)

Die abgebildeten Graphen I und II sind Graphen der Schar; einer der beiden gehört zu einem positiven Wert von a. Entscheiden Sie, welcher Graph dies ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung.



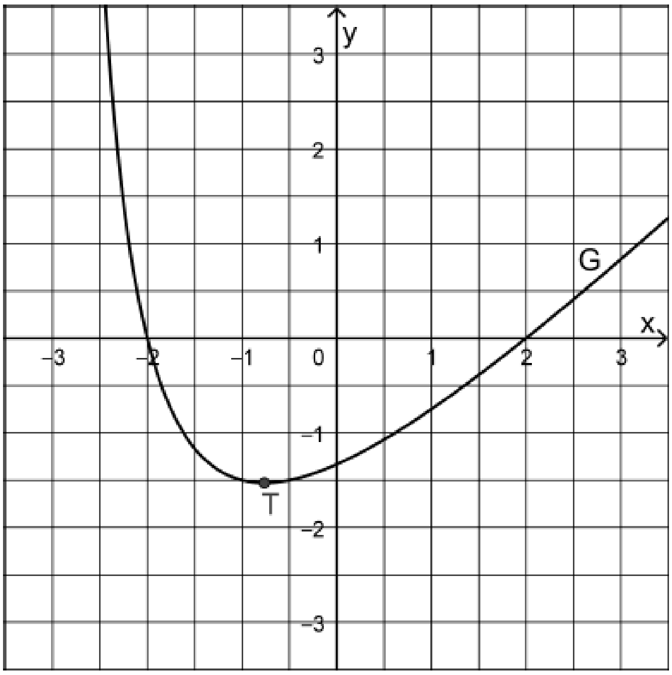
Teilaufgabe Teil A 4a (2 BE)

Geben Sie einen Term einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion g an, die den Wertebereich $[-2; 4]$ hat.

Teilaufgabe Teil A 4b (3 BE)

Geben Sie einen Term einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion h an, sodass der Term $\sqrt{h(x)}$ genau für $x \in [-2; 4]$ definiert ist. Erläutern Sie die Ihrer Angabe zugrunde liegenden Überlegungen.

Die Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen G der in $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ definierten Funktion f mit $f(x) = x - 3 + \dfrac{5}{x+3}$. G hat genau einen Tiefpunkt T.



Teilaufgabe Teil B 1a (4 BE)

Die Geraden mit den Gleichungen $x = -3$ und $y = x - 3$ haben eine besondere Bedeutung für G. Zeichnen Sie die beiden Geraden in die Abbildung ein und geben Sie diese Bedeutung an. Geben Sie zudem die Koordinaten des Schnittpunkts der beiden Geraden an.

Teilaufgabe Teil B 1b (3 BE)

Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts von G mit der y-Achse. Begründen Sie anhand des gegebenen Terms von f, dass G für $x > -3$ oberhalb der Gerade mit der Gleichung $y = x - 3$ verläuft.

Teilaufgabe Teil B 1c (3 BE)

Weisen Sie nach, dass $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x+3}$ gilt, indem Sie den Term $x - 3 + \dfrac{5}{x+3}$ geeignet umformen, und begründen Sie, dass f genau die Nullstellen -2 und 2 hat.

Teilaufgabe Teil B 1d (5 BE)

Ermitteln Sie rechnerisch einen Term der ersten Ableitungsfunktion f' von f und berechnen Sie die x-Koordinate von T.

Teilaufgabe Teil B 1e (3 BE)

Ermitteln Sie anhand der Abbildung einen Näherungswert für das Integral $\int\limits_{-2}^{2} f(x)\ \mathrm{dx}$.

Betrachtet wird die in $]-3;+\infty[$ definierte Integralfunktion $J : x \mapsto \int\limits_{-2}^{x} f(t)\ \mathrm{dt}$.

Teilaufgabe Teil B 1f (6 BE)

Begründen Sie, dass die in $]-3;+\infty[$ definierte Funktion $F : x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - 3x + 5 \cdot \ln(x+3)$ für $x > -3$ eine Stammfunktion von f ist.
Zeigen Sie damit, dass $\lim\limits_{x \to -3} J(x) = -\infty$ gilt, und deuten Sie diese Aussage geometrisch.

Teilaufgabe Teil B 1g (3 BE)

Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass J mindestens zwei Nullstellen besitzt.

Betrachtet wird die Schar der in $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ definierten Funktionen $f_k : x \mapsto \frac{x^2 - k}{x+3}$ mit $k \in \mathbb{R} \setminus \{9\}$. Der Graph von f_k wird mit G_k bezeichnet. Die Funktion f aus Aufgabe 1 ist somit die Funktion f_4 dieser Schar.

Teilaufgabe Teil B 2a (4 BE)

Geben Sie die Anzahl der Nullstellen von f_k in Abhängigkeit von k an und begründen Sie, dass die Funktion f_0 der Schar eine Nullstelle ohne Vorzeichenwechsel hat.

Für die erste Ableitungsfunktion von f_k gilt $f_k'(x) = \frac{x^2 + 6x + k}{(x+3)^2}$.

Teilaufgabe Teil B 2b (2 BE)

Begründen Sie, dass G_k für $k > 9$ keine Extrempunkte besitzt.

Die Tangente an G_k im Punkt $(0|f_k(0))$ wird mit t_k bezeichnet.

Teilaufgabe Teil B 2c (3 BE)

Zeigen Sie, dass t_k die Steigung $\frac{k}{9}$ hat, und bestimmen Sie denjenigen Wert von k, für den t_k senkrecht zur Gerade mit der Gleichung $y = x - 3$ steht.

Teilaufgabe Teil B 2d (4 BE)

Geben Sie eine Gleichung von t_k an und beurteilen Sie folgende Aussage:
Es gibt einen Punkt, der für alle $k \in \mathbb{R} \setminus \{9\}$ *auf* t_k *liegt.*