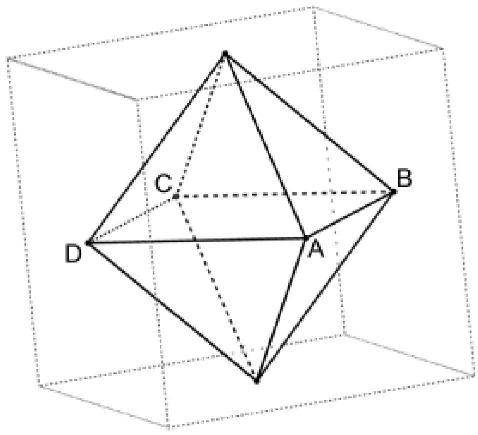
Abitur 2024 Mathematik Geometrie VI

Die Mittelpunkte der Seitenflächen eines Würfels sind die Eckpunkte eines Oktaeders (vgl. Abbildung).
Die Eckpunkte $A(1|2|1)$, B, $C(-3|-6|9)$ und D des Oktaeders liegen in der Ebene H mit der Gleichung $2x_1 + x_2 + 2x_3 - 6 = 0$.



Teilaufgabe Teil A a (2 BE)

Weisen Sie nach, dass die Kantenlänge des Würfels 12 beträgt.

Teilaufgabe Teil A b (3 BE)

Bestimmen Sie die Koordinaten eines der beiden Eckpunkte des Oktaeders, die nicht in H liegen.

Abbildung 1 zeigt die Pyramide ABCDS mit den Eckpunkten $A(-3|-3|0)$, $B(3|-3|0)$, $C(3|3|0)$, $D(-3|3|0)$ und $S(0|0|4)$ sowie den Punkt $O(0|0|0)$, der in der quadratischen Grundfläche der Pyramide liegt. Die Seitenfläche CDS der Pyramide liegt in der Ebene E.

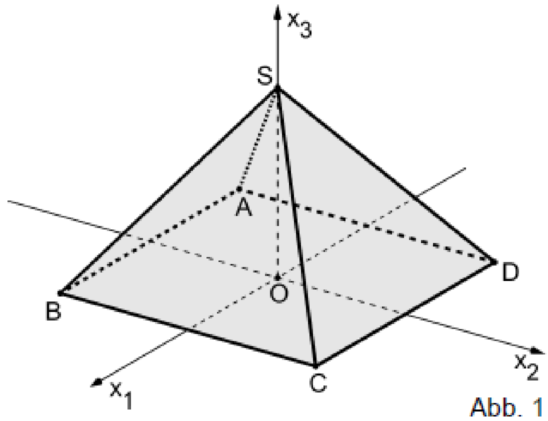


Abb. 1

Teilaufgabe Teil B a (4 BE)

Berechnen Sie den Inhalt der Oberfläche der Pyramide.

Teilaufgabe Teil B b (3 BE)

Genau eine der folgenden Gleichungen (1) bis (3) beschreibt eine Symmetrieebene der Pyramide. Geben Sie diese Gleichung an und begründen Sie für eine der anderen Gleichungen, dass die durch sie beschriebene Ebene keine Symmetrieebene der Pyramide ist.

(1) $x_1 - x_3 = 0$ (2) $x_1 + x_2 + x_3 = 4$ (3) $x_1 + x_2 = 0$

Teilaufgabe Teil B c (3 BE)

Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform.

(zur Kontrolle: $4x_2 + 3x_3 - 12 = 0$)

Teilaufgabe Teil B d (5 BE)

Es gibt einen Punkt $P(0|0|p)$, der im Innern der Pyramide liegt und von allen vier Seitenflächen sowie der Grundfläche der Pyramide den gleichen Abstand hat. Mithilfe des folgenden Gleichungssystems lässt sich der Wert von p bestimmen:

I $\quad \overrightarrow{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad$ II $\quad 4 \cdot 4t + 3 \cdot (p + 3t) - 12 = 0$ $\quad$ III $\quad \left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right| = p$

Erläutern Sie die Überlegungen im geometrischen Zusammenhang, die diesem Vorgehen zur Bestimmung des Werts von p zugrunde liegen.

Die Ebene E gehört zur Schar der Ebenen $E_k : 4k \cdot x_1 + 4\sqrt{1-k^2} \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 - 12 = 0$ mit $k \in [-1; 1]$.

Die Seitenfläche ADS der Pyramide liegt in der Ebene E_{-1} der Schar, die Seitenfläche BCS in der Ebene E_1.

Teilaufgabe Teil B e (1 BE)

Zeigen Sie, dass der Punkt S in allen Ebenen der Schar enthalten ist.

Teilaufgabe Teil B f (4 BE)

Weisen Sie nach, dass die Größe des Winkels, unter dem die Gerade OS die Ebene E_k schneidet, unabhängig von k ist.

Jede Ebene E_k der Schar schneidet die $x_1\,x_2$-Ebene in einer Gerade g_k. Mit R_k wird jeweils derjenige Punkt auf g_k bezeichnet, der von O den kleinsten Abstand hat. In Abbildung 2 sind g_k und R_k beispielhaft für eine Ebene E_k der Schar dargestellt.

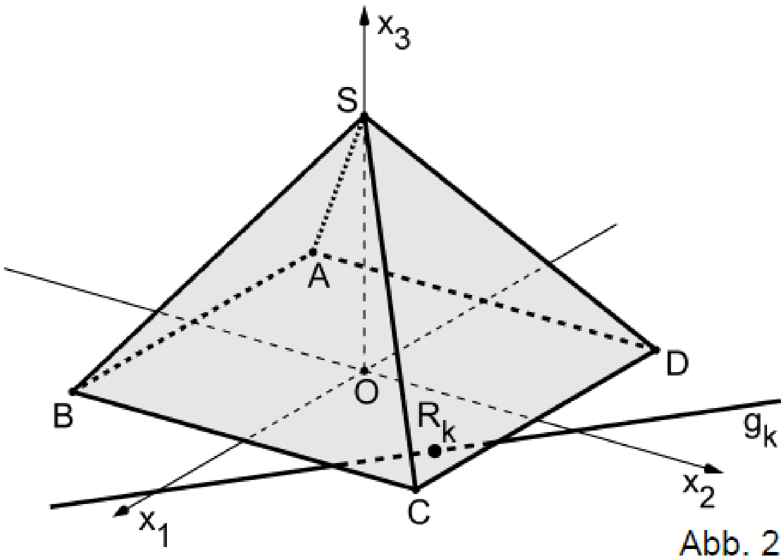


Abb. 2

Teilaufgabe Teil B g (2 BE)

Zeichnen Sie die Punkte R_{-1} und R_1 in Abbildung 2 ein.

Teilaufgabe Teil B h (3 BE)

Durchläuft k alle Werte von -1 bis 1, dann dreht sich das Dreieck OR_kS um die Strecke [OS]. Dabei entsteht ein Körper. Beschreiben Sie die Form des entstehenden Körpers und bestimmen Sie das Volumen dieses Körpers.