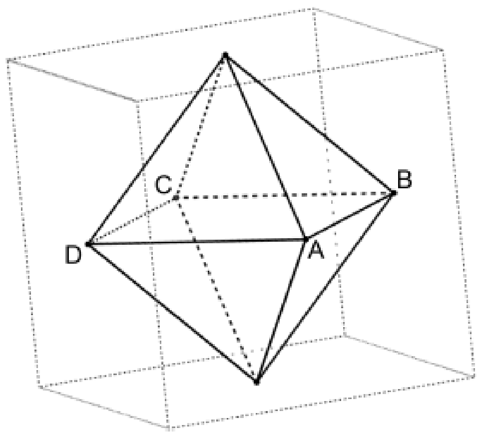
Abitur 2024 Mathematik Geometrie V

Die Mittelpunkte der Seitenflächen eines Würfels sind die Eckpunkte eines Oktaeders (vgl. Abbildung).
Die Eckpunkte $A(1|2|1)$, B, $C(-3|-6|9)$ und D des Oktaeders liegen in der Ebene H mit der Gleichung $2x_1 + x_2 + 2x_3 - 6 = 0$.



Teilaufgabe Teil A a (2 BE)

Weisen Sie nach, dass die Kantenlänge des Würfels 12 beträgt.

Teilaufgabe Teil A b (3 BE)

Bestimmen Sie die Koordinaten eines der beiden Eckpunkte des Oktaeders, die nicht in H liegen.

Gegeben sind die Punkte $A(8|0|6)$, $B(7|1|6)$ und $S(0|0|10)$, die in der Ebene E liegen.

Teilaufgabe Teil B a (3 BE)

Berechnen Sie die Länge der Strecke [AB] und geben Sie die besondere Lage dieser Strecke im Koordinatensystem an.

(zur Kontrolle: $\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{2}$)

Teilaufgabe Teil B b (3 BE)

Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform.

(zur Kontrolle: $E : x_1 + x_2 + 2x_3 - 20 = 0$)

Betrachtet werden die Schar der Geraden $g_k : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1+k \\ 1-k \\ -1 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{R}$ sowie der Punkt $C(9|1|5)$.

Teilaufgabe Teil B c (4 BE)

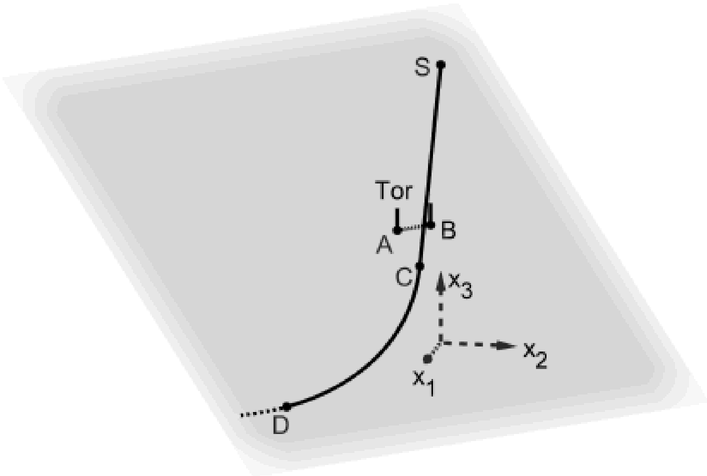
Begründen Sie, dass jede Gerade der Schar in E liegt, und bestimmen Sie denjenigen Wert k, für den der Punkt C auf g_k liegt.

(zur Kontrolle: $k = 0,8$)

Teilaufgabe Teil B d (5 BE)

Begründen Sie, dass die Größe des Schnittwinkels von g_k und der $x_1\,x_2$-Ebene weniger als 30° beträgt, wenn $2k^2 > 1$ gilt.

Eine Skifahrerin fährt einen Hang hinab. Dieser wird modellhaft durch ein Flächenstück beschrieben, das in der Ebene E liegt. Die Startposition der Abfahrt entspricht dem Punkt S. Auf dem Hang befindet sich ein Tor, dessen Begrenzungsstangen im Modell an den Punkten A und B stehen. Von ihrer Startposition fährt die Skifahrerin zunächst entlang einer geraden Fahrlinie bis zu einer Stelle unterhalb des Tors, die dem Punkt C entspricht (vgl. Abbildung).



Die gerade Fahrlinie liegt dabei im Modell auf der Gerade $g_{0,8} : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1,8 \\ 0,2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Die $x_1 x_2$-Ebene beschreibt die Horizontale; eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 5 Metern in der Realität.

Teilaufgabe Teil B e (3 BE)

Geben Sie mithilfe des Ergebnisses aus Aufgabe a die Breite des Tors auf Meter genau an. Begründen Sie mithilfe der Aussage aus Aufgabe d, dass die gerade Fahrlinie der Skifahrerin um weniger als 30° gegenüber der Horizontalen geneigt ist.

Teilaufgabe Teil B f (4 BE)

Begründen Sie rechnerisch, dass die Skifahrerin das Tor tatsächlich durchquert.

Teilaufgabe Teil B g (3 BE)

An der Stelle, die im Modell dem Punkt C entspricht, wird die Fahrlinie der Skifahrerin ohne Knick durch eine kreisbogenförmige Kurve fortgesetzt.
Während der Fahrt entlang dieser Kurve erreicht die Skifahrerin eine Stelle, die dem Punkt $D(18|-2|2)$ entspricht.
Der Kreisbogen, der diese Kurve beschreibt, ist Teil eines Kreises mit Mittelpunkt $M(m_1|m_2|m_3)$.
Die Koordinaten von M können mit folgendem Gleichungssystem ermittelt werden.

I $\quad m_1 + m_2 + 2m_3 - 20 = 0$

II $\quad \begin{pmatrix} m_1 - 9 \\ m_2 - 1 \\ m_3 - 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1,8 \\ 0,2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$

III $\quad \sqrt{(m_1 - 9)^2 + (m_2 - 1)^2 + (m_3 - 5)^2} = \sqrt{(m_1 - 18)^2 + (m_2 + 2)^2 + (m_3 - 2)^2}$

Erläutern Sie die geometrischen Überlegungen, die den Gleichungen I, II und III zugrunde liegen.