

## Abitur 2021 Mathematik Geometrie V

Gegeben ist die Gerade  $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , sowie eine weitere Gerade  $h$ , welche parallel zu  $g$  ist und durch den Punkt  $A(2|0|0)$  verläuft. Der Punkt  $B$  liegt auf  $g$  so, dass die Geraden  $AB$  und  $h$  senkrecht zueinander sind.

### Teilaufgabe Teil A a (4 BE)

Bestimmen Sie die Koordinaten von  $B$ .

(zur Kontrolle:  $B(-2|3|2)$ )

### Teilaufgabe Teil A b (1 BE)

Berechnen Sie den Abstand von  $g$  und  $h$ .

Die Punkte  $A(6|0|4)$ ,  $B(0|6|4)$ ,  $C(-6|0|4)$  und  $D$  liegen in der Ebene  $E$  und bilden die Eckpunkte der quadratischen Grundfläche einer Pyramide  $ABCDS$  mit der Spitze  $S(0|0|1)$ .  $A$ ,  $B$  und  $S$  liegen in der Ebene  $F$ .

### Teilaufgabe Teil B a (4 BE)

Zeigen Sie rechnerisch, dass das Dreieck  $ABS$  gleichschenkelig ist. Geben Sie die Koordinaten des Punkts  $D$  an und beschreiben Sie die besondere Lage der Ebene  $E$  im Koordinatensystem.

### Teilaufgabe Teil B b (3 BE)

Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene  $F$  in Koordinatenform.

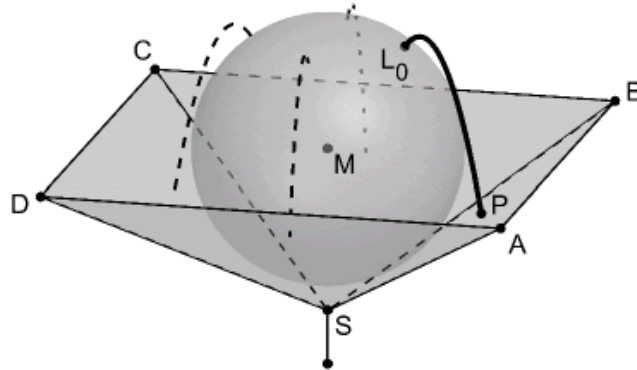
(zur Kontrolle:  $F: x_1 + x_2 - 2x_3 + 2 = 0$ )

### Teilaufgabe Teil B c (2 BE)

Berechnen Sie das Volumen  $V$  der Pyramide  $ABCDS$ .

(zur Kontrolle:  $V = 72$ )

Ein auf einer Stange montierter Brunnen besteht aus einer Marmorkugel, die in einer Bronzeschale liegt. Die Marmorkugel berührt die vier Innenwände der Bronzeschale an jeweils genau einer Stelle. Die Bronzeschale wird im Modell durch die Seitenflächen der Pyramide  $ABCD$  beschrieben, die Marmorkugel durch eine Kugel mit Mittelpunkt  $M(0|0|4)$  und Radius  $r$ . Die  $x_1 x_2$ -Ebene des Koordinatensystems stellt im Modell den horizontal verlaufenden Erdboden dar; eine Längeneinheit entspricht einem Dezimeter in der Realität.



**Teilaufgabe Teil B d (4 BE)**

Ermitteln Sie den Durchmesser der Marmorkugel auf Zentimeter genau.

(zur Kontrolle:  $r = \sqrt{6}$ )

**Teilaufgabe Teil B e (2 BE)**

Weisen Sie nach, dass der höchste Punkt des Brunnens ca. 64 cm über dem Erdboden liegt.

Auf der Oberfläche der Marmorkugel treten an vier Stellen Wasserfontänen aus. Eine dieser Austrittsstellen wird im Modell durch den Punkt  $L_0(1|1|6)$  beschrieben. Die zugehörige Fontäne wird modellhaft durch Punkte  $L_t \left( t + 1 | t + 1 | 6, 2 - 5 \cdot (t - 0, 2)^2 \right)$  mit geeigneten Werten  $t \in \mathbb{R}_0^+$  beschrieben.

**Teilaufgabe Teil B f (4 BE)**

Der Punkt  $P$  liegt innerhalb des Dreiecks  $ABS$  und beschreibt im Modell die Stelle, an der die Fontäne auf die Bronzeschale trifft (vgl. Abbildung). Bestimmen Sie die Koordinaten von  $P$ .

**Teilaufgabe Teil B g (2 BE)**

Untersuchen Sie, ob der höchste Punkt der Wasserfontäne höher liegt als der höchste Punkt des Brunnens.

**Teilaufgabe Teil B h (4 BE)**

Aus den vier Austrittsstellen fließen pro Sekunde insgesamt 80 ml Wasser in die Bronzschale. Bestimmen Sie die Zeit in Sekunden, die vergeht, bis der anfangs leere Brunnen vollständig mit Wasser gefüllt ist.