Fachabitur 2026 Mathematik NT Infinitesimalrechnung A I

Teilaufgabe 1.

Die Funktion f ist eine ganzrationale Funktion vierten Grades mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet. Die zweite Ableitungsfunktion von f besitzt die Funktionsgleichung $f''(x) = -0,5 \cdot (x+4)(x-1)$.

Teilaufgabe 1.1 (3 BE)

Skizzieren Sie einen Ausschnitt des Graphen der Funktion f'', anhand dessen die maximalen Krümmungsintervalle des Graphen G_f abgelesen werden können. Geben Sie diese Intervalle an.

Teilaufgabe 1.2 (3 BE)

Die Funktion f' ist die erste Ableitungsfunktion der Funktion f. Geben Sie das Verhalten der Funktionswerte von f' für $x \to \pm\infty$ sowie jeweils die Art und Lage aller relativen Extremstellen von f' an.

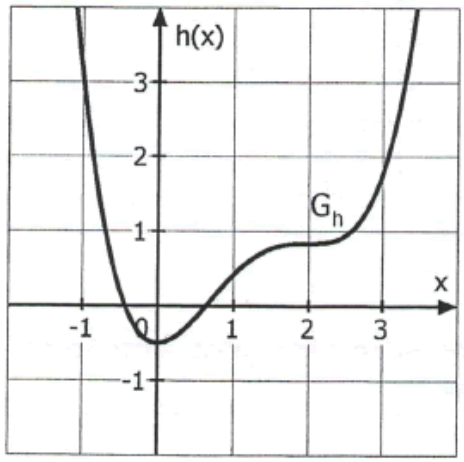
Teilaufgabe 2. (3 BE)

Gegeben ist die quadratische Funktion $q_k : x \mapsto \frac{1}{4}x^2 - 2x + k$ mit $k \in \mathbb{R}$ und der Definitionsmenge $D_{q_k} = \mathbb{R}$.

Berechnen Sie den Wert des Parameters k so, dass der Scheitelpunkt der zugehörigen Parabel auf der x-Achse liegt.

Teilaufgabe 3. (4 BE)

Die folgende Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen G_h einer auf ganz $\mathbb{R}$ definierten ganzrationalen Funktion h vierten Grades. Die Funktion H bezeichne eine Stammfunktion von h.



Setzen Sie jeweils eines der drei mathematischen Symbole „<“, „>“ oder „=“ in das Kästchen ein, sodass eine wahre Aussage entsteht.

Hinweis: Jedes richtig gesetzte Symbol ergibt +1 BE, jedes falsch gesetzte -0,5 BE und jedes nicht gesetzte 0 BE. Im ungünstigsten Fall wird die Aufgabe mit 0 BE bewertet.

a) $h'(x) \square\ 0$ für $x < 0$

b) $h''(2) \square\ 0$

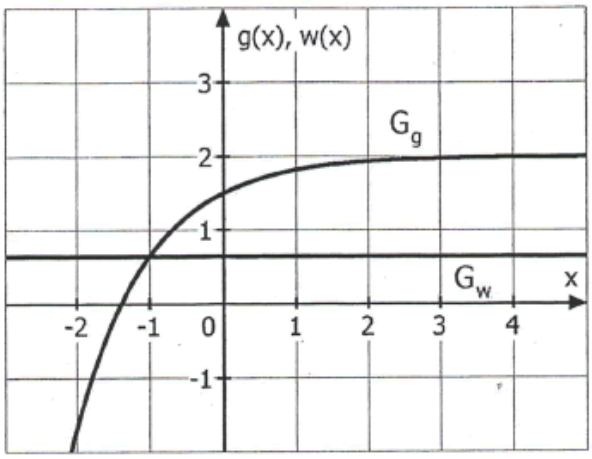
c) $\int_0^2 h(x)\,dx \square\ 0$

d) $H'(2) \square\ 0$

© Abiturloesung.de

Teilaufgabe 4.

Gegeben ist die Funktion g mit der Funktionsgleichung $g(x) = -0,5 \cdot e^{-x} + 2$ und der Definitionsmenge $D_g = \mathbb{R}$. Die folgende Abbildung zeigt einen Ausschnitt des zugehörigen Graphen G_g sowie den Graphen G_w der konstanten Funktion $w : x \mapsto -0,5 \cdot e + 2$ mit der Definitionsmenge $D_w = \mathbb{R}$.



Teilaufgabe 4.1 (3 BE)

Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden G_t, die Tangente an den Graphen der Funktion g an der Stelle $x = 0$ ist.

Teilaufgabe 4.2 (3 BE)

Ermitteln Sie rechnerisch die Koordinaten des Schnittpunktes P der beiden Graphen der Funktionen g und w.

Teilaufgabe 4.3 (3 BE)

Bestimmen Sie den Funktionsterm $G(x)$ der Stammfunktion von g, deren Graph die y-Achse bei 2 schneidet.

Teilaufgabe 5.

Der Graph G_f der Funktion f mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$ besitzt im Ursprung einen Terrassenpunkt und den absoluten Tiefpunkt bei $x = 3$. Sonst existieren keine weiteren Punkte mit waagrechter Tangente. Außerdem ist bekannt, dass die Funktionsgleichung die Form $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ hat.

Teilaufgabe 5.1 (6 BE)

Bestimmen Sie die Werte der Parameter a, b, c und d und damit den Funktionsterm $f(x)$.

[Mögliches Ergebnis: $f(x) = \frac{1}{4}\left(x^4 - 4x^3\right)$]

Teilaufgabe 5.2 (3 BE)

Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f sowie die Koordinaten der Punkte, in denen G_f eine waagrechte Tangente besitzt.

Teilaufgabe 5.3 (4 BE)

Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen G_f für $-1 \leq x \leq 4$ in ein kartesisches Koordinatensystem.

Maßstab für beide Achsen: 1 LE = 1 cm

Teilaufgabe 5.4 (4 BE)

Berechnen Sie $\int_{-1}^{4} f(x)\,\mathrm{dx}$. Erklären Sie, welche geometrische Bedeutung das Ergebnis bezüglich G_f hat. Veranschaulichen Sie Ihre Erklärung in der in 5.3 angefertigten Zeichnung.

Teilaufgabe 5.5 (4 BE)

Betrachtet wird nun die auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktion g mit der Funktionsgleichung $g(x) = f(x) + 7 = \frac{1}{4}\left(x^4 - 4x^3\right) + 7$.

Begründen Sie ohne Rechnung, weshalb der Graph der Funktion g keine Nullstelle besitzt. Ermitteln Sie auch $\int_{1}^{3} (g(x) - f(x))\ \mathrm{dx}$.

Teilaufgabe 6. (4 BE)

Die Wertentwicklungen zweier Anlagen A und B werden für $t \in \mathbb{R}_0^+$ durch die folgenden Funktionen beschrieben:

$K_A : t \mapsto 20000 \cdot 1,02^t$ und $K_B : t \mapsto 30000 \cdot 0,98^t$

Dabei steht die Variable t für die Zeit in Jahren ab dem Zeitpunkt $t_0 = 0$. Die Funktionswerte von K_A bzw. K_B geben jeweils den Anlagewert in Euro zum Zeitpunkt t an.

Berechnen Sie auf eine Nachkommastelle gerundet, nach wie vielen Jahren die beiden Anlagen den gleichen Wert haben.

© Abiturloesung.de

Teilaufgabe 7.

In den vergangenen Jahren hatte der Befall von Bäumen durch den Eichenprozessionsspinner in Deutschland zunehmend auch gesundheitliche Auswirkungen auf die Bevölkerung. Aus diesem Grund wird in einem stark betroffenen Gebiet regelmäßig die momentane Anzahl der Patienten, deren Erkrankungen im Zusammenhang mit dem Eichenprozessionsspinner stehen, erfasst.
Anhand dieser Fallzahlen wird die momentane Anzahl der Patienten in einem Jahr mit starkem Befall durch den Eichenprozessionsspinner zwischen Anfang Mai und Ende Juli vereinfacht durch die reelle Funktion $P : t \mapsto 200 \cdot t \cdot e^{-0,25 \cdot t + 0,75}$ mit $t \in [0; 12]$ modelliert. Dabei steht die Variable t für die vergangene Zeit in Wochen ab dem 1. Mai ($t_0 = 0$) des betrachteten Jahres. Der Funktionswert von P gibt die momentane Anzahl der Patienten an.
Auf das Mitführen von Einheiten während der Rechnungen wird verzichtet. Runden Sie Ihre Ergebnisse sinnvoll.

Teilaufgabe 7.1 (2 BE)

Berechnen Sie die nach dem Modell momentane Anzahl der Patienten nach elf Wochen (zum Zeitpunkt $t = 11$).

Teilaufgabe 7.2 (8 BE)

Den erhobenen Fallzahlen ist zu entnehmen, dass im betrachteten Zeitraum die momentane Anzahl der Patienten nach vier Wochen mit ca. 620 ihr absolutes Maximum erreicht hat. Überprüfen Sie durch Rechnung, ob das verwendete Modell diese Daten annähernd widerspiegelt.

[Mögliches Teilergebnis: $\dot{P}(t) = 200 \cdot e^{-0,25 \cdot t + 0,75} \cdot (1 - 0,25t)$]

Teilaufgabe 7.3 (5 BE)

Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen der Funktion P im Bereich $0 \leq t \leq 12$ in ein Koordinatensystem. Bestimmen Sie anschließend mithilfe des Graphen nachvollziehbar den Monat, in dem die momentane Anzahl der Patienten nach Erreichen des Maximalwertes erstmals wieder auf 500 gesunken ist.
Wählen Sie für die Zeichnung für beide Achsen einen geeigneten Maßstab.

Teilaufgabe 7.4 (3 BE)

An der Stelle $t_W = 8$ ändert der Graph der Funktion P sein Krümmungsverhalten von einer Rechts- in eine Linkskrümmung. Beschreiben Sie die Bedeutung dieser Stelle im Sachzusammenhang. Konkretisieren Sie Ihre Beschreibung mithilfe des Wertes $\dot{P}(8)$.