

Fachabitur 2025 Mathematik NT Infinitesimalrechnung A II**Teilaufgabe 1.** (4 BE)

Der Graph einer ganzrationalen Funktion p zweiten Grades mit der Definitionsmenge $D_p = \mathbb{R}$ besitzt den Scheitelpunkt $S(3|2)$ und verläuft durch den Koordinatenursprung.

Bestimmen Sie einen Funktionsterm $p(x)$ von p und geben Sie die Wertemenge von p an.

Teilaufgabe 2.

Gegeben ist die Funktion $k : x \mapsto x^5 - 4x^3$ mit der Definitionsmenge $D_k = \mathbb{R}$.

Teilaufgabe 2.1 (4 BE)

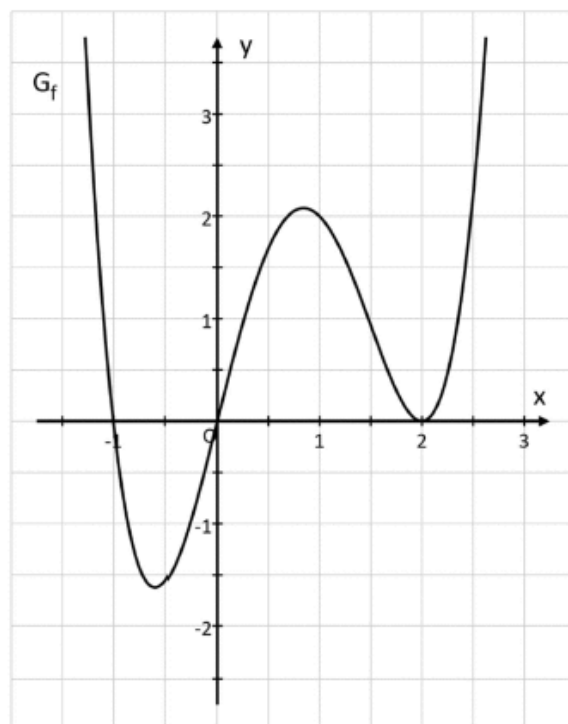
Ermitteln Sie die Nullstellen der Funktion k und geben Sie ihre jeweilige Vielfachheit an.

Teilaufgabe 2.2 (3 BE)

Geben Sie einen Wert für b mit $b \in \mathbb{R}$ und $b \neq -1$ an, so dass gilt: $\int_{-1}^b k(x) dx = 0$.
Begründen Sie Ihre Wahl.

Teilaufgabe 3.

Die folgende Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen G_f einer auf ganz $\mathbb{R}$ definierten ganzrationalen Funktion f vierten Grades. Die Funktion F bezeichne eine Stammfunktion von f .



Teilaufgabe 3.1 (4 BE)

Entscheiden Sie jeweils anhand der Abbildung, ob folgende Aussagen wahr (w) oder falsch (f) sind bzw. ob dies mit den gegebenen Informationen nicht entscheidbar (n. e.) ist. Kreuzen Sie entsprechend an.

Hinweis: Jedes richtig gesetzte Kreuz ergibt +1 BE, jedes falsch gesetzte - 0,5 BE und jedes nicht gesetzte 0 BE. Im ungünstigsten Fall wird die Aufgabe mit 0 BE bewertet.

Aussage	w	f	n. e.
$f''(-1) > 0$			
$f'(2) = f(2)$			
Die lokale Änderungsrate der Funktion f an der Stelle $x = -0,5$ ist negativ.			
f hat genau drei Nullstellen.			

Teilaufgabe 3.2 (3 BE)

Skizzieren Sie in das gegebene Koordinatensystem von 3. einen möglichen Graphen der Stammfunktion F , welcher durch den Koordinatenursprung verläuft. Aus Ihrer Skizze sollen - sofern vorhanden - Extrem- und Wendestellen des Graphen von F klar ersichtlich sein.

Teilaufgabe 4. (4 BE)

Gegeben ist die Funktion h mit der Funktionsgleichung $h(x) = x \cdot e^{x-2}$ und der Definitionsmenge $D_h = \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente G_t an den Graphen der Funktion h an der Stelle $x = 2$.

Teilaufgabe 5.

Gegeben ist die ganzrationale Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{8}(x^4 - 6x^2 + 8x)$ und der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$. Der Graph der Funktion f in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_f bezeichnet.

Teilaufgabe 5.1 (2 BE)

Geben Sie das Verhalten der Funktionswerte von f für $x \rightarrow \pm\infty$ an.

Teilaufgabe 5.2 (8 BE)

Ermitteln Sie jeweils die Art und die Koordinaten der Punkte von G_f mit waagerechter Tangente.

Teilaufgabe 5.3 (6 BE)

Zeigen Sie, dass die Gerade G_g mit $g(x) = -x + \frac{5}{8}$ und $D_g = \mathbb{R}$ durch die beiden Wendepunkte von G_f verläuft.

Teilaufgabe 5.4 (5 BE)

Zeichnen Sie G_f und G_g unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse sowie weiterer geeigneter Funktionswerte für $-3 \leq x \leq 2$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Maßstab für beide Achsen: 1 LE = 2 cm.

Teilaufgabe 5.5 (5 BE)

Die Gerade G_g schließt mit G_f im Bereich $-1 \leq x \leq 1$ ein endliches Flächenstück ein. Markieren Sie dieses Flächenstück in Ihrer Zeichnung aus 5.4 und berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhalts.

Teilaufgabe 6.

Die Körpertemperatur einer an einem grippalen Infekt erkrankten Person kann vereinfacht durch die Modellfunktion T mit der Funktionsgleichung

$$T(t) = 36,5 + 2t \cdot e^{-0,25 \cdot t} \text{ mit } t \in \mathbb{R}_0^+$$

beschrieben werden. Dabei steht die Variable t für die Zeit in Tagen ab Auftreten der ersten Symptome zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ und $T(t)$ für die Körpertemperatur in $^{\circ}\text{C}$ zum Zeitpunkt t .

Auf das Mitführen von Einheiten kann im Folgenden verzichtet werden. Runden Sie Ihre Ergebnisse auf eine Nachkommastelle.

Teilaufgabe 6.1 (2 BE)

Untersuchen Sie, welche Temperatur sich nach diesem Modell theoretisch langfristig einstellt.

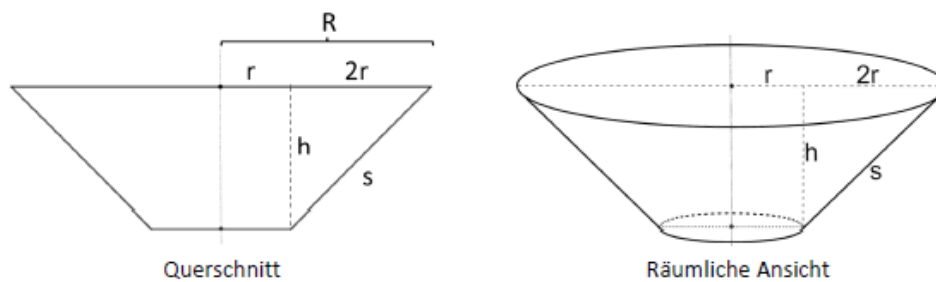
Teilaufgabe 6.2 (2 BE)

Ermitteln Sie rechnerisch, welche maximale Körpertemperatur die erkrankte Person nach diesem Modell erreicht.

[Mögliches Teilergebnis: $\dot{T}(t) = 2 \cdot e^{-0,25 \cdot t} (1 - 0,25t)$]

Teilaufgabe 7.

Ein Pflanzgefäß hat die Form eines umgedrehten geraden Kreiskegelstumpfes, dessen Querschnittsfläche ein Trapez ist (siehe nachfolgende nicht maßstabsgetreue Skizzen). Der obere Kreisradius R ist dreimal so groß wie der untere Kreisradius r . Die Länge der Seitenkante s beträgt 25 cm. Vorgaben der Produktion legen fest, dass die Höhe h des Pflanzgefäßes mindestens 15 cm und höchstens 23 cm beträgt. Die Dicke der „Wände“ darf bei den weiteren Betrachtungen vernachlässigt werden. Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden.



Ohne Nachweis darf verwendet werden, dass für das Volumen dieses geraden Kreiskegelstumpfes gilt:

$$V(r; h) = \frac{13}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Teilaufgabe 7.1 (3 BE)

Zeigen Sie, dass für das Volumen des Pflanzgefäßes in Abhängigkeit von der Höhe h gilt:

$$V(h) = \frac{13}{12} \cdot \pi \cdot (625h - h^3)$$

Teilaufgabe 7.2 (6 BE)

Bestimmen Sie den Wert für die Höhe h des Pflanzgefäßes so, dass das Volumen des Pflanzgefäßes maximal ist. Berechnen Sie das maximale Volumen sowie den dazugehörigen oberen Durchmesser des Pflanzgefäßes.