Fachabitur 2024 Mathematik NT Infinitesimalrechnung A II

Teilaufgabe 1. (4 BE)

Gegeben ist die quadratische Funktion $p : x \mapsto -x^2 + 1$ mit der Definitionsmenge $D_p = \mathbb{R}$. Ihr Graph in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_p bezeichnet.
Der Graph G_p und die x-Achse schließen ein endliches Flächenstück ein. Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts dieses Flächenstücks.

Teilaufgabe 2.

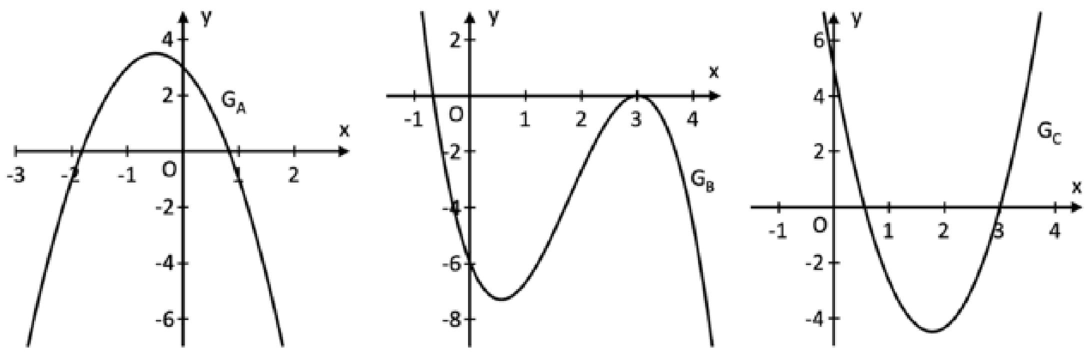
Gegeben ist die Funktion $k : x \mapsto 0,5(x-3)^2 \left(2x + \frac{4}{3}\right)$ mit der Definitionsmenge $D_k = \mathbb{R}$.

Teilaufgabe 2.1 (4 BE)

Geben Sie die Nullstellen der Funktion k mit ihrer jeweiligen Vielfachheit an und bestimmen Sie damit ein Intervall, in dem die x-Koordinate des lokalen Hochpunkts des Graphen der Funktion k liegt.

Teilaufgabe 2.2 (3 BE)

In der nachfolgenden Abbildung sind Ausschnitte der Graphen G_A, G_B und G_C von in ganz $\mathbb{R}$ definierten Funktionen dargestellt.
Entscheiden Sie begründet, welcher der drei Graphen G_A, G_B bzw.G_C zur Ableitungsfunktion von k gehört.



Teilaufgabe 3.

Gegeben sind die Funktionen g und h durch die Funktionsgleichungen $g(x) = 2 \cdot e^x - 1$ und $h(x) = e^{2 \cdot x}$ mit den Definitionsmengen $D_g = D_h = \mathbb{R}$.

Teilaufgabe 3.1 (4 BE)

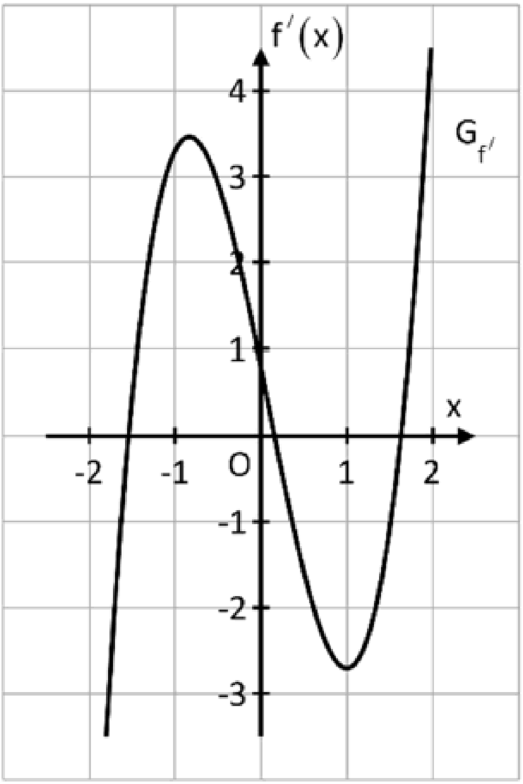
Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten des einzigen gemeinsamen Punktes P der Graphen der beiden Funktionen g und h.

Teilaufgabe 3.2 (2 BE)

Der Graph der Funktion g wird an der x-Achse gespiegelt und anschließend um zwei Einheiten entlang der y-Achse nach oben verschoben. Der daraus entstandene neue Funktionsgraph gehört zur Funktion j.
Geben Sie einen Funktionsterm der Funktion j an.

Teilaufgabe 4. (5 BE)

Die folgende Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen $G_{f'}$ der Ableitungsfunktion f' einer auf ganz $\mathbb{R}$ definierten ganzrationalen Funktion f vierten Grades. Die Funktion F bezeichne eine Stammfunktion von f.



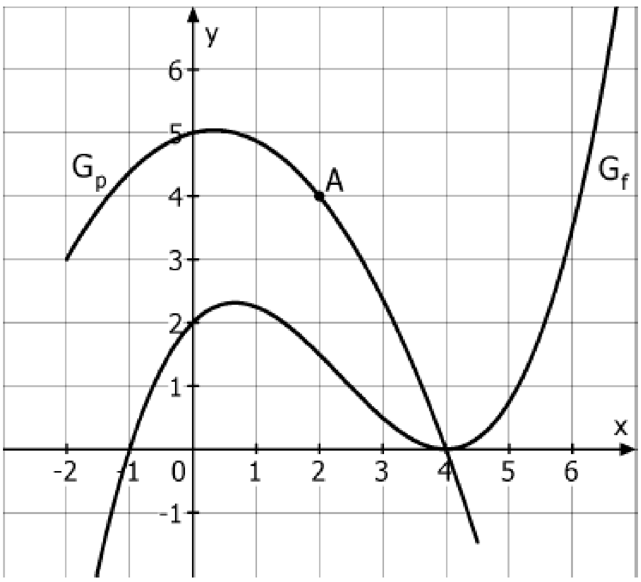
Entscheiden Sie jeweils, ob folgende Aussagen wahr (w) oder falsch (f) sind bzw. ob dies mit den gegebenen Informationen nicht entschieden (n) werden kann. Kreuzen Sie entsprechend an.

Hinweis: Jedes richtig gesetzte Kreuz ergibt +1 BE, jedes falsch gesetzte –1 BE und jedes nicht gesetzte 0 BE. Im ungünstigsten Fall wird die Aufgabe mit 0 BE bewertet.

Aussage	w	f	n
G_f ist punktsymmetrisch zum Ursprung.			
G_f besitzt genau zwei Wendepunkte.			
G_f besitzt einen globalen Tiefpunkt.			
F hat genau vier Nullstellen.			
Für $x \to -\infty$ gilt: $f(x) \to \infty$			

Teilaufgabe 5.

Die Abbildung zeigt ausschnittsweise den Graphen G_f einer ganzrationalen Funktion f dritten Grades mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$ und den Graphen G_p der quadratischen Funktion $p : x \mapsto -\frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{4}x + 5$ mit der Definitionsmenge $D_p = \mathbb{R}$.



Teilaufgabe 5.1 (3 BE)

Entnehmen Sie der Abbildung aus 5. geeignete ganzzahlige Werte und bestimmen Sie einen Funktionsterm $f(x)$ der Funktion f.

Teilaufgabe 5.2

Die Funktion f lässt sich auch in der Form $f(x) = \frac{1}{8}\left(x^3 - 7x^2 + 8x + 16\right)$ darstellen. Der Nachweis hierfür ist nicht erforderlich.

Teilaufgabe 5.2.1 (3 BE)

Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente G_g an G_f im Punkt $P(0|2)$.

Teilaufgabe 5.2.2 (3 BE)

Zeigen Sie, dass in keinem Punkt des Graphen G_f eine Tangente mit der Steigung $m = -2$ angelegt werden kann.

Teilaufgabe 5.2.3 (4 BE)

Ermitteln Sie die exakten Koordinaten des Wendepunkts von G_f.

Teilaufgabe 5.2.4 (6 BE)

G_p (siehe Abbildung oben) und die Gerade G_h mit der Funktionsgleichung $h(x) = x + 2$ und der Definitionsmenge $D_h = \mathbb{R}$ schneiden sich im Punkt $A(2|4)$.
Zeichnen Sie die Gerade G_h in die obige Abbildung ein und schraffieren Sie das Flächenstück, das durch G_p, G_h und die y-Achse im I. Quadranten des Koordinatensystems eingeschlossen wird. Berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhalts.

Teilaufgabe 6.

Beim Backen eines Roggenbrotes kann Sauerteig als Triebmittel für den Brotteig verwendet werden. Für den Sauerteig setzt man Mehl und Wasser im selben Verhältnis zueinander an. Milchsäurebakterien in Mehl und Wasser sorgen dafür, dass im Gemisch die notwendige Milchsäure entsteht.
Ein frisch angesetzter Sauerteig besitzt zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ einen pH-Wert (Säuregrad) von 6,0. Nach 40 Stunden hat der Sauerteig einen pH-Wert von 3,5.
Das Durchsäuern des Gemisches lässt sich näherungsweise durch die Funktion p mit der Funktionsgleichung $p(t) = 3,2 + b \cdot e^{-k \cdot t}$ mit $t \in \mathbb{R}_0^+$ und $b, k \in \mathbb{R}$ beschreiben. Dabei steht die Variable t für die Zeit in Stunden ab dem Zeitpunkt $t_0 = 0$. Der Funktionswert von p gibt den pH-Wert zum Zeitpunkt t an.
Auf das Mitführen von Einheiten während der Rechnungen wird verzichtet. Runden Sie Ihre Ergebnisse sinnvoll.

Teilaufgabe 6.1 (4 BE)

Bestimmen Sie die Werte der Parameter b und k.

Teilaufgabe 6.2

Im Folgenden gilt $p(t) = 3,2 + 2,8 \cdot e^{-0,056 \cdot t}$.

Teilaufgabe 6.2.1 (6 BE)

Der Sauerteig kann ab einem pH-Wert von 4,0 dem Brotteig zugegeben werden. Bestimmen Sie rechnerisch den Zeitpunkt, ab welchem die Zugabe des Sauerteigs möglich ist. Berechnen Sie die Abnahmegeschwindigkeit des pH-Wertes zu diesem Zeitpunkt.

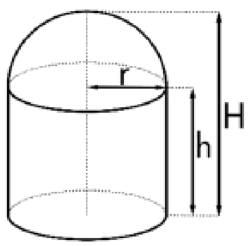
[Mögliches Teilergebnis: $\dot{p}\,(t) = -0,1568 \cdot e^{-0,056 \cdot t}$]

Teilaufgabe 6.2.2 (4 BE)

Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen der Funktion p im Bereich $0 \leq t \leq 60$ in ein Koordinatensystem. Wählen Sie dazu für beide Achsen einen geeigneten Maßstab.

Teilaufgabe 7.

Ein Hersteller von Tauchflaschen plant ein neues Tauchflaschenmodell. Die Wandstärke des Materials wird vernachlässigt. Die Tauchflasche hat vereinfacht die Form eines geraden Zylinders mit aufgesetzter Halbkugel (siehe Abbildung). Die Firma gibt für die Zylinderhöhe h (in dm) die Bedingung $h(r) = \frac{4}{r} - \frac{3r}{2}$ vor. Bei den Berechnungen wird auf das Mitführen von Einheiten verzichtet.
Runden Sie Ihre Ergebnisse auf zwei Nachkommastellen.



Teilaufgabe 7.1 (3 BE)

Zeigen Sie, dass die Maßzahl des Volumens (in dm^3) der Tauchflasche in Abhängigkeit vom Zylinderradius r (in dm) durch die Funktion V mit der Funktionsgleichung $V(r) = -\frac{5}{6}r^3\,\pi + 4r\,\pi$ beschrieben werden kann.

Teilaufgabe 7.2 (7 BE)

Der Hersteller gibt für das neue Modell einen Radius von 0,85 dm bis 1,4 dm vor. Ermitteln Sie den Radius r, für den das Volumen der Tauchflasche maximal wird und berechnen Sie die Maßzahl dieses maximalen Volumens.