Fachabitur 2024 Mathematik NT Infinitesimalrechnung A I

Teilaufgabe 1. (4 BE)

Gegeben ist die quadratische Funktion $p : x \mapsto -x^2 + 1$ mit der Definitionsmenge $D_p = \mathbb{R}$. Ihr Graph in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_p bezeichnet.
Der Graph G_p und die x-Achse schließen ein endliches Flächenstück ein. Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts dieses Flächenstücks.

Teilaufgabe 2.

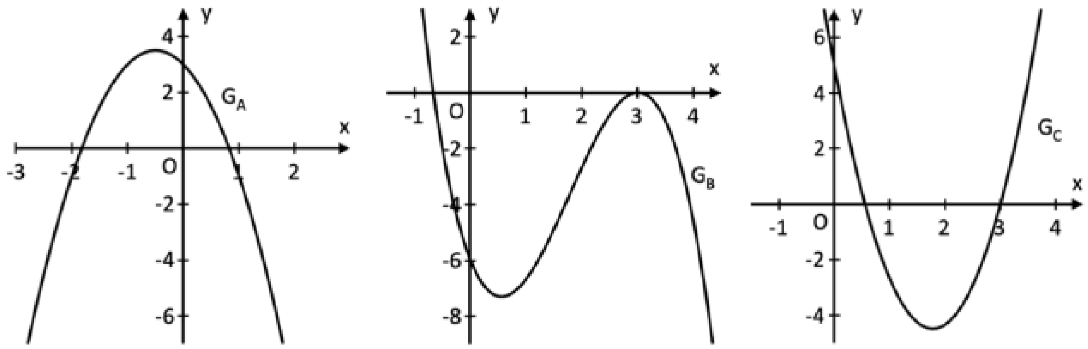
Gegeben ist die Funktion $k : x \mapsto 0,5(x-3)^2\left(2x + \dfrac{4}{3}\right)$ mit der Definitionsmenge $D_k = \mathbb{R}$.

Teilaufgabe 2.1 (4 BE)

Geben Sie die Nullstellen der Funktion k mit ihrer jeweiligen Vielfachheit an und bestimmen Sie damit ein Intervall, in dem die x-Koordinate des lokalen Hochpunkts des Graphen der Funktion k liegt.

Teilaufgabe 2.2 (3 BE)

In der nachfolgenden Abbildung sind Ausschnitte der Graphen G_A, G_B und G_C von in ganz $\mathbb{R}$ definierten Funktionen dargestellt.
Entscheiden Sie begründet, welcher der drei Graphen G_A, G_B bzw.G_C zur Ableitungsfunktion von k gehört.



Teilaufgabe 3.

Gegeben sind die Funktionen g und h durch die Funktionsgleichungen $g(x) = 2 \cdot e^x - 1$ und $h(x) = e^{2 \cdot x}$ mit den Definitionsmengen $D_g = D_h = \mathbb{R}$.

Teilaufgabe 3.1 (4 BE)

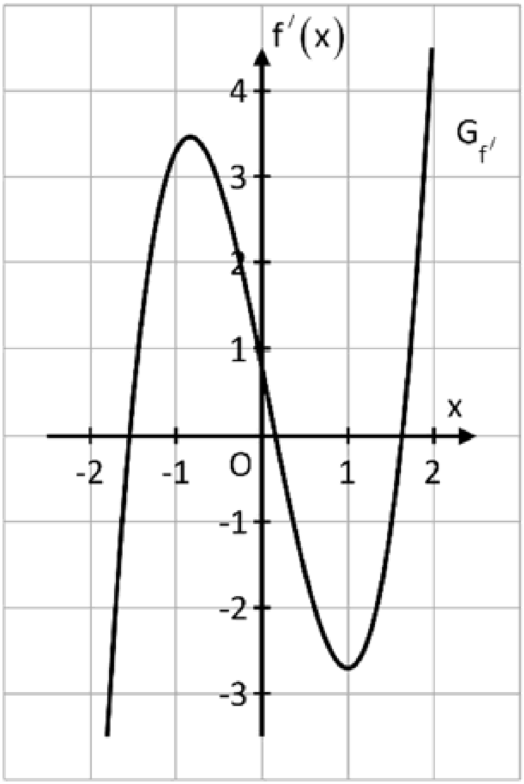
Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten des einzigen gemeinsamen Punktes P der Graphen der beiden Funktionen g und h.

Teilaufgabe 3.2 (2 BE)

Der Graph der Funktion g wird an der x-Achse gespiegelt und anschließend um zwei Einheiten entlang der y-Achse nach oben verschoben. Der daraus entstandene neue Funktionsgraph gehört zur Funktion j.
Geben Sie einen Funktionsterm der Funktion j an.

Teilaufgabe 4. (5 BE)

Die folgende Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen $G_{f'}$ der Ableitungsfunktion f' einer auf ganz $\mathbb{R}$ definierten ganzrationalen Funktion f vierten Grades. Die Funktion F bezeichne eine Stammfunktion von f.



Entscheiden Sie jeweils, ob folgende Aussagen wahr (w) oder falsch (f) sind bzw. ob dies mit den gegebenen Informationen nicht entschieden (n) werden kann. Kreuzen Sie entsprechend an.

Hinweis: Jedes richtig gesetzte Kreuz ergibt +1 BE, jedes falsch gesetzte –1 BE und jedes nicht gesetzte 0 BE. Im ungünstigsten Fall wird die Aufgabe mit 0 BE bewertet.

Aussage	w	f	n
G_f ist punktsymmetrisch zum Ursprung.			
G_f besitzt genau zwei Wendepunkte.			
G_f besitzt einen globalen Tiefpunkt.			
F hat genau vier Nullstellen.			
Für $x \to -\infty$ gilt: $f(x) \to \infty$			

Teilaufgabe 5.

Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto -\frac{1}{2}x^4 - 2x^3 - 2x^2$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$. Der Graph der Funktion f in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_f bezeichnet.

Teilaufgabe 5.1 (3 BE)

Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f.

Teilaufgabe 5.2 (7 BE)

Ermitteln Sie jeweils die Art und die Koordinaten aller Punkte, in denen G_f eine waagrechte Tangente besitzt.

Teilaufgabe 5.3 (4 BE)

Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen G_f für $-3 \leq x \leq 1$ in ein kartesisches Koordinatensystem.
Maßstab für beide Achsen: 1 LE = 1 cm

Teilaufgabe 5.4

Der Graph G_p einer quadratischen Funktion p mit der Definitionsmenge $D_p = \mathbb{R}$ besitzt in einem kartesischen Koordinatensystem den Scheitelpunkt $S(-1|-1,5)$ und schneidet den Graphen G_f in den Punkten $A(-3|-4,5)$ und $B(1|-4,5)$.

Teilaufgabe 5.4.1 (6 BE)

Bestimmen Sie einen Funktionsterm von p und zeichnen Sie die zugehörige Parabel für $-3 \leq x \leq 1$ in das vorhandene Koordinatensystem ein.

[Mögliches Teilergebnis: $p(x) = -\frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{9}{4}$]

Teilaufgabe 5.4.2 (4 BE)

Die beiden Graphen G_f und G_p schließen ein endliches Flächenstück ein.
Berechnen Sie die exakte Maßzahl des Flächeninhalts des beschriebenen Flächenstücks.

Teilaufgabe 6.

In sogenannten Aluminiumhütten wird nach einem bestimmten Verfahren Aluminium aus Aluminiumoxid gewonnen. Die Temperatur vom Ausgangsstoff bis zum fertigen Endprodukt Aluminium während des Herstellungsprozesses kann modellhaft durch die Funktion T mit der Funktionsgleichung $T(t) = 250 \cdot t \cdot e^{-0{,}1 \cdot t} + 22$ mit $t \in \mathbb{R}_0^+$ beschrieben werden. Dabei steht die Variable t für die Zeit in Minuten ab dem Zeitpunkt $t_0 = 0$. Der Funktionswert von T gibt die Temperatur in Grad Celsius zum Zeitpunkt t an.
Auf das Mitführen von Einheiten während der Rechnungen wird verzichtet. Runden Sie Ihre Ergebnisse sinnvoll.

Teilaufgabe 6.1 (4 BE)

Berechnen Sie die Temperatur im Herstellungsprozess nach fünf Minuten und die Temperatur, welche sich nach diesem Modell theoretisch langfristig einstellt.

Teilaufgabe 6.2 (7 BE)

Beim Erreichen des Temperaturmaximums liegt Aluminium in flüssiger Form vor. Es wird mittels eines Saugrohres abgesaugt und kühlt anschließend ab.
Ermitteln Sie rechnerisch dieses Temperaturmaximum.

[Mögliches Teilergebnis: $\dot{T}(t) = 250 \cdot e^{-0{,}1 \cdot t} - 25 \cdot t \cdot e^{-0{,}1 \cdot t}$]

Teilaufgabe 6.3 (5 BE)

Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen der Funktion T im Bereich $0 \leq t \leq 60$ in ein Koordinatensystem. Wählen Sie dazu für beide Achsen einen geeigneten Maßstab. Entnehmen Sie anschließend dem Graphen den Zeitpunkt $t_{20-\text{fach}}$, zu dem die Temperatur im Abkühlvorgang dem 20-fachen der Anfangstemperatur entspricht.

Teilaufgabe 6.4 (3 BE)

Für die Koordinaten des Wendepunktes des Graphen der Funktion T gilt ohne Nachweis $W\ (20|T(20))$. Berechnen Sie $\dot{T}(20)$ und interpretieren Sie den Wert im Sinne der vorliegenden Thematik.