Abitur 2023 Mathematik Geometrie VI

Gegeben sind die Punkte $A(3|5|5)$ und $B(1|1|1)$ sowie die Geraden g und h, die sich in B schneiden. Die Gerade g hat den Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, die Gerade h den Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

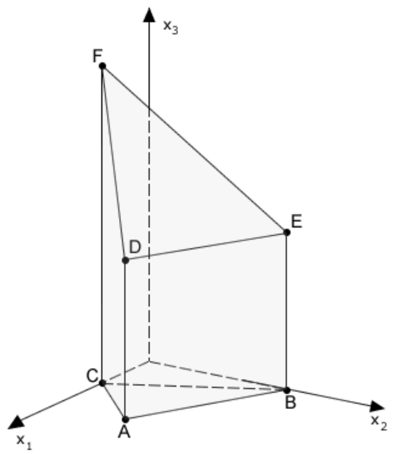
Teilaufgabe Teil A a (1 BE)

Weisen Sie nach, dass A auf g liegt.

Teilaufgabe Teil A b (4 BE)

Bestimmen Sie die Koordinaten zweier Punkte C und D so, dass C auf h liegt und das Viereck ABCD eine Raute ist.

Die Abbildung zeigt den Körper ABCDEF mit $A(6|3|0)$, $B(0|6|0)$, $C(3|0|0)$, $D(6|3|6)$, $E(0|6|6)$ und $F(3|0|12)$.
Die Punkte D, E und F liegen in der Ebene L.



Teilaufgabe Teil B a (4 BE)

Ermitteln Sie eine Gleichung von L in Koordinatenform.

(zur Kontrolle: $2x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 42 = 0$)

Teilaufgabe Teil B b (3 BE)

Bestimmen Sie die Größe des Winkels, den L mit der $x_1 x_2$-Ebene einschließt.

Teilaufgabe Teil B c (3 BE)

Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC kann mit dem Term $6 \cdot 6 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6$ berechnet werden. Veranschaulichen Sie diese Tatsache durch geeignete Eintragungen in der Abbildung.

Teilaufgabe Teil B d (3 BE)

Berechnen Sie das Volumen des Körpers ABCDEF.

Teilaufgabe Teil B e (4 BE)

Die Ebene N_k enthält die x_3-Achse und den Punkt $P_k(1-k|k|0)$ mit $k \in]0;1[$. Welche Kanten des Körpers von N_k geschnitten werden, ist abhängig von k. Durchläuft k alle Werte zwischen 0 und 1, so gibt es Bereiche $]a;b[$, für die jeweils gilt, dass N_k für alle Werte von $k \in]a;b[$ die gleichen Kanten des Körpers schneidet. Bestimmen Sie den größten dieser Bereiche und geben Sie die zugehörigen Kanten an.

Teilaufgabe Teil B f (5 BE)

Auf der Kante [AD] liegt der Punkt Q, auf der Kante [BE] der Punkt $R(0|6|2)$. Das Dreieck FQR hat in Q einen rechten Winkel. Bestimmen Sie die x_3-Koordinate von Q.

© Abiturloesung.de

Teilaufgabe Teil B g (3 BE)

Der Körper wird so um die Gerade AB gedreht, dass der mit D bezeichnete Eckpunkt nach der Drehung in der $x_1\,x_2$-Ebene liegt und dabei eine positive x_2-Koordinate hat. Die folgenden Rechnungen liefern die Lösung einer Aufgabe im Zusammenhang mit der beschriebenen Drehung:

$$\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0 \iff \lambda = 0{,}8, \text{ d.h. } S(4{,}8|3{,}6|0)$$

$$\overrightarrow{T} = \overrightarrow{S} + \left|\overrightarrow{C\,S}\right| \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Formulieren Sie eine passende Aufgabenstellung und geben Sie die Bedeutung von S an.

Lösung

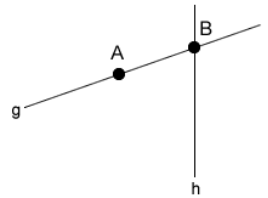
Teilaufgabe Teil A a (1 BE)

Gegeben sind die Punkte $A(3|5|5)$ und $B(1|1|1)$ sowie die Geraden g und h, die sich in B schneiden. Die Gerade g hat den Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, die Gerade h den Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Weisen Sie nach, dass A auf g liegt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A a

Lagebeziehung Punkt und Gerade



$A(3|5|5)$, $B(1|1|1)$

$\overrightarrow{\mathrm{RV}}_g = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ Richtungsvektor der Geraden g

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} = -2 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{\mathrm{RV}}_g}$$

$\Rightarrow \quad A \in g$

Teilaufgabe Teil A b (4 BE)

Bestimmen Sie die Koordinaten zweier Punkte C und D so, dass C auf h liegt und das Viereck ABCD eine Raute ist.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A b

Geradengleichung aufstellen

$A(3|5|5)$, $B(1|1|1)$

$\overrightarrow{\mathrm{RV}}_h = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Richtungsvektor der Geraden h

Erläuterung: *Geradengleichung*

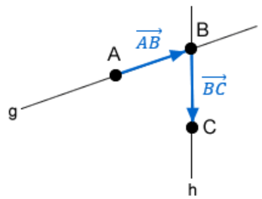
Eine Gerade g ist durch einen Ortsvektor $\overrightarrow{P}$ und einen Richtungsvektor $\overrightarrow{v}$ eindeutig bestimmt:

$g: \overrightarrow{X} = \overrightarrow{P} + \mu \cdot \overrightarrow{v} \quad , \mu \in \mathbb{R}$

Wenn hier B als Aufpunkt genommen wird, dann ist $\overrightarrow{B}$ der Ortsvektor (des Aufpunkts) der Geraden h.

$$h: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Länge einer Strecke



$C \in h \quad \Rightarrow \quad C(1+\lambda|1|1)$

$$\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{C} - \overrightarrow{B} = \begin{pmatrix} 1+\lambda \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Eigenschaften einer Raute*

Eine Raute ist ein Viereck mit folgenden Eigenschaften:

- alle Seiten sind gleich lang
- gegenüberliegende Seiten sind einander parallel
- gegenüberliegende Winkel sind gleich groß
- die Diagonalen stehen senkrecht aufeinander
- die Diagonalen halbieren sich gegenseitig

Es muss gelten: $\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|$

Erläuterung: *Betrag eines Vektors*

Die Länge (bzw. der Betrag) $|\overrightarrow{a}|$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

$$|\overrightarrow{a}| = \left|\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

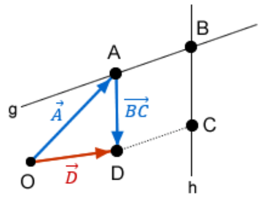
$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = \left|\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{4+16+16} = \sqrt{36} = 6$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right| = \left|\begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{\lambda^2} = \pm\lambda$$

$\Rightarrow$ z.B. $\lambda = 6$

$\Rightarrow$ $C(7|1|1)$

Lage eines Punktes



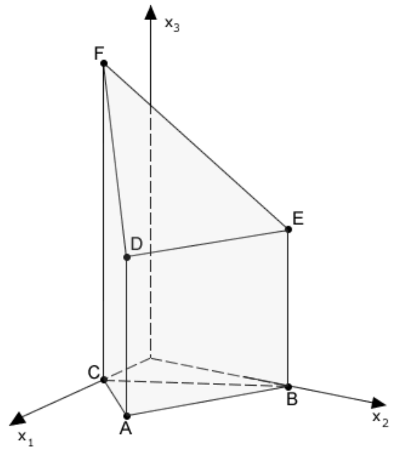
$\overrightarrow{D} = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{BC}$

$$\overrightarrow{D} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$D(9|5|5)$

Teilaufgabe Teil B a (4 BE)

Die Abbildung zeigt den Körper ABCDEF mit $A(6|3|0)$, $B(0|6|0)$, $C(3|0|0)$, $D(6|3|6)$, $E(0|6|6)$ und $F(3|0|12)$.
Die Punkte D, E und F liegen in der Ebene L.

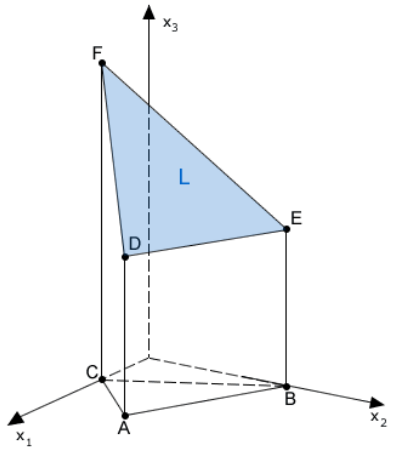


Ermitteln Sie eine Gleichung von L in Koordinatenform.

(zur Kontrolle: $2x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 42 = 0$)

Lösung zu Teilaufgabe Teil B a

Ebene aus drei Punkte



$D(6|3|6)$, $E(0|6|6)$, $F(3|0|12)$

Richtungsvektoren der Ebene L bestimmen:

$$\overrightarrow{\mathrm{DE}} = \overrightarrow{E} - \overrightarrow{D} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{DF}} = \overrightarrow{F} - \overrightarrow{D} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

D sei Aufpunkt des Ortsvektors der Ebene L.

Ebenengleichung in Normalenform

Normalenvektor $\overrightarrow{n_L}$ der Ebene L bestimmen:

Erläuterung: *Vektorprodukt*

Das Vektorprodukt (Kreuzprodukt) $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ zweier Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ ist ein Vektor $\overrightarrow{n}$, der senkrecht auf der von beiden Vektoren aufgespannte Ebene steht.

Für die komponentenweise Berechnung gilt:

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{DE}} \times \overrightarrow{\mathrm{DF}} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18-0 \\ 0+36 \\ 18+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 36 \\ 27 \end{pmatrix} = 9 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Vereinfachen*

Die Länge eines Normalenvektors ist nicht entscheidend für die Ebenengleichung.
Der Normalenvektor muss nur senkrecht zur Ebene stehen.
Vereinfachungen durch Teilen/Multiplizieren durch/mit einen Faktor sind erlaubt.

Hier wird der Normalenvektor mit $\frac{1}{9}$ multipliziert.

Das erleichtert das Weiterrechnen <u>wesentlich</u>.

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{n_L} = \frac{1}{9} \cdot 9 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ebenengleichung in Normalenform bestimmen:

Erläuterung: *Normalenform einer Ebene*

Zum Aufstellen der Normalenform einer Ebene werden nur der Normalenvektor und ein Punkt P aus der Ebene (Aufpunkt) benötigt.

$E : \overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{X} = \overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{P}$

Hier (D ist Aufpunkt):

$$L: \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{n_L}} \circ \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{D}}$$

$L: 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 12 + 12 + 18$

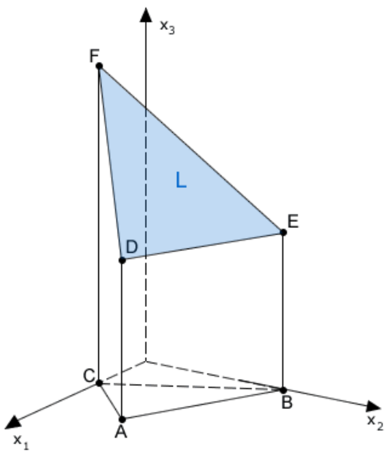
$L: 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 42 = 0$

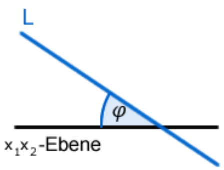
Teilaufgabe Teil B b (3 BE)

Bestimmen Sie die Größe des Winkels, den L mit der $x_1 x_2$-Ebene einschließt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B b

Winkel zwischen zwei Ebenen



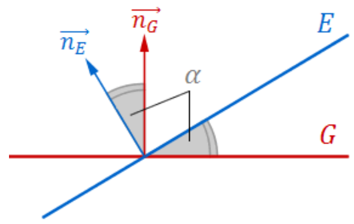


$L: 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 42 = 0$

Normalenvektor $\overrightarrow{n_L}$ der Ebene L: $\quad \overrightarrow{n_L} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

Normalenvektor der $x_1 x_2$-Ebene: $\quad \overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Erläuterung: *Winkel zwischen zwei Vektoren*



Der Winkel α zwischen zwei Ebenen E und G ist gleich dem Winkel zwischen den Normalenvektoren $\overrightarrow{n_E}$ und $\overrightarrow{n_G}$.

Winkel φ zwischen den Normalenvektoren der Ebene L und der $x_1 x_2$-Ebene bestimmen:

Erläuterung: *Skalarprodukt, Winkel zwischen zwei Vektoren*

Aus der allgemeinen Definition des Skalarproduktes zweier Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$

$$\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right| \cdot \cos \underbrace{\measuredangle\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)}_{\alpha}$$

folgt für den Winkel α zwischen den beiden Vektoren:

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right|}$$

(Formel zur Winkelberechnung zwischen 2 Vektoren)

$$\cos\varphi = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}$$

Erläuterung: *Betrag eines Vektors*

Die Länge (bzw. der Betrag) $|\overrightarrow{a}|$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

$$|\overrightarrow{a}| = \left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Für den Richtungsvektor der $x_1 x_2$-Ebene $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ gilt z.B:

$$|\overrightarrow{n}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1$$

$$\cos\varphi = \frac{0+0+3}{\sqrt{2^2+4^2+3^2} \cdot 1} = \frac{3}{\sqrt{29}}$$

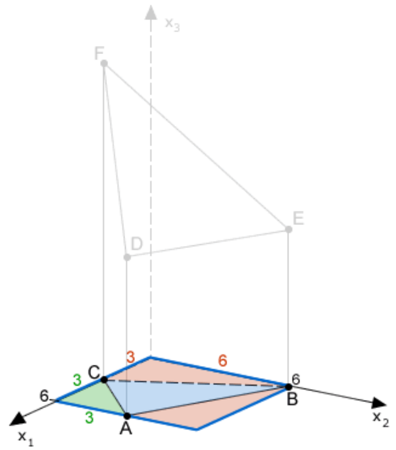
$$\Rightarrow \quad \varphi = \cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{29}}\right) \approx 56,15^\circ$$

Teilaufgabe Teil B c (3 BE)

Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC kann mit dem Term $6 \cdot 6 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6$ berechnet werden. Veranschaulichen Sie diese Tatsache durch geeignete Eintragungen in der Abbildung.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B c

Flächenberechnung



Erläuterung:

Fläche Rechteck: $6 \cdot 6$

Fläche Dreieck links: $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3$

Fläche oberes und rechtes Dreieck: $2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6$

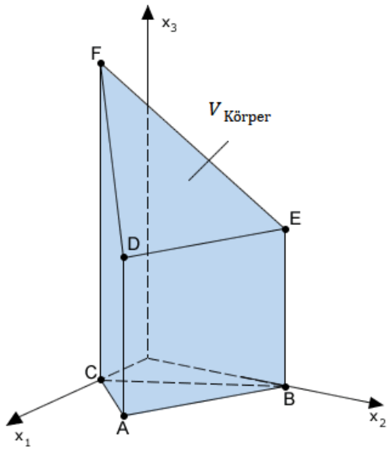
Teilaufgabe Teil B d (3 BE)

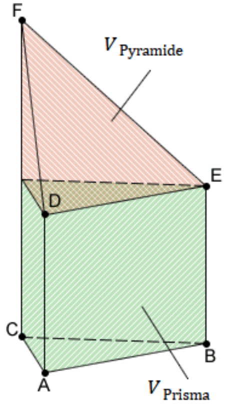
Berechnen Sie das Volumen des Körpers ABCDEF.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B d

Volumen eines geometrischen Körpers

© Abiturloesung.de





Erläuterung: *Volumen eines Prismas*

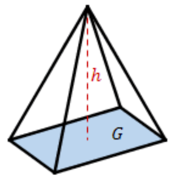
Das Volumen V eines Prismas mit Grundfläche G und Höhe h ist gegeben durch:

$V = G \cdot h$

In diesem Fall ist die Grundfläche das Dreieck ABC und die Höhe die x_3-Koordinate des Punktes D.
Der Flächeninhalt des Dreiecks ist aus Teil B Teilaufgabe c bekannt.

$$V_{\text{Prisma}} = G \cdot h = A_{\text{ABC}} \cdot 6 = \left(6 \cdot 6 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6\right) \cdot 6 = 81 \text{ FE}$$

Erläuterung: *Volumen einer Pyramide*



Eine Pyramide mit Grundfläche G und Höhe h hat ein Volumen von:

$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$

In diesem Fall ist die Grundfläche das Dreieck ABC und die Höhe die x_3-Koordinate des Punktes F minus die x_3-Koordinate des Punktes D.

$$V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} A_{\text{ABC}} \cdot 6 = \frac{1}{3} \cdot 81 = 27 \text{ FE}$$

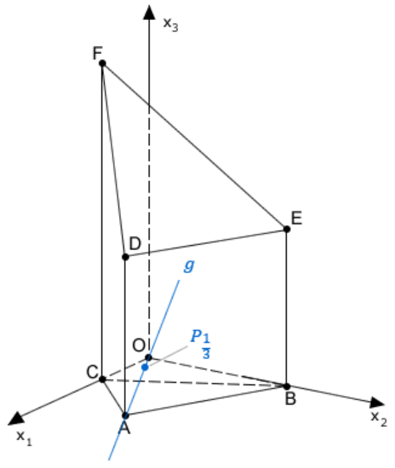
$$V_{\text{Körper}} = 81 + 27 = 108 \text{ FE}$$

Teilaufgabe Teil B e (4 BE)

Die Ebene N_k enthält die x_3-Achse und den Punkt $P_k(1-k|k|0)$ mit $k \in]0;1[$. Welche Kanten des Körpers von N_k geschnitten werden, ist abhängig von k. Durchläuft k alle Werte zwischen 0 und 1, so gibt es Bereiche $]a;b[$, für die jeweils gilt, dass N_k für alle Werte von $k \in]a;b[$ die gleichen Kanten des Körpers schneidet. Bestimmen Sie den größten dieser Bereiche und geben Sie die zugehörigen Kanten an.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B e

Geradengleichung aufstellen



Gerade g druch O und A bestimmen:

Erläuterung: *Geradengleichung*

Eine Gerade g ist durch einen Ortsvektor $\overrightarrow{P}$ und einen Richtungsvektor $\overrightarrow{v}$ eindeutig bestimmt:

$g: \overrightarrow{X} = \overrightarrow{P} + \mu \cdot \overrightarrow{v} \quad , \mu \in \mathbb{R}$

Wenn hier O als Aufpunkt genommen wird, dann ist $\overrightarrow{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ der Ortsvektor (des Aufpunkts) der Geraden g.

$$g: \overrightarrow{X} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lage eines Punktes

$$P_k \in g \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} 1-k \\ k \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 1-k &= 6\lambda \\ k &= 3\lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda = \tfrac{k}{3} \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

$$1-k = 6 \cdot \frac{k}{3}$$

$$1 = 3k \qquad \Rightarrow \qquad k = \frac{1}{3}$$

Lagebeziehung Gerade und Ebene

Bereich: $\left]\frac{1}{3};1\right[$

Kanten: [AB], [DE], [CB], [EF]

Erläuterung:

Überlegungen:

1. Für $k = 0$ liegt P_0 auf der x_1-Achse. Die Ebene N_0 ist somit die $x_1 x_3$-Ebene (sie enthält ja die x_3-Achse).

2. Für $k = 1$ liegt P_1 auf der x_2-Achse. Die Ebene N_1 ist somit die $x_2 x_3$-Ebene (sie enthält ja die x_3-Achse).

3. Lässt man k von 0 bis 1 laufen, so dreht sich die $x_1 x_3$-Ebene gegen den Uhrzeigersinn, bis sie die $x_2 x_3$-Ebene erreicht. Dabei schneidet N_k verschiede Kanten des Körpers.

4. Am Anfang der Rotation schneidet N_k die Kanten [AC], [BC], [DF] und [EF].

5. Für $k = \frac{1}{3}$ enthält N_k den Punkt A.

6. Für $k > \frac{1}{3}$ schneidet N_k die Kanten [AB], [DE], [CB] und [EF].

7. Für $0 < k < \frac{1}{3}$ schneidet N_k immer dieselben Kanten (s. Punkt 4). Für $\frac{1}{3} < k < 1$ schneidet N_k auch immer dieselben Kanten (s. Punkt 5)

Gefragt ist, welcher der Bereiche der größte ist (von der Länge). Das ist der Bereich $\left]\frac{1}{3}; 1\right[$.

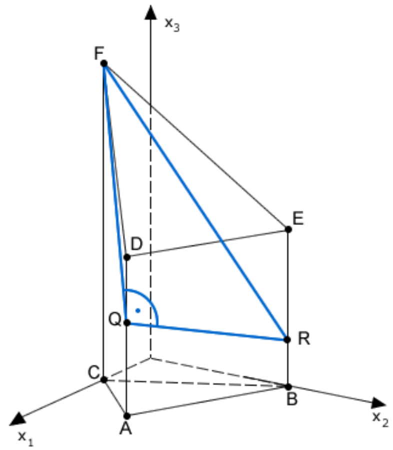
Für $k \in \left]\frac{1}{3}; 1\right[$ schneidet N_k die Kanten [AB], [DE], [CB] und [EF].

Teilaufgabe Teil B f (5 BE)

Auf der Kante [AD] liegt der Punkt Q, auf der Kante [BE] der Punkt $R(0|6|2)$. Das Dreieck FQR hat in Q einen rechten Winkel. Bestimmen Sie die x_3-Koordinate von Q.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B f

Geradengleichung aufstellen



Gerade g_{AD} durch A und D aufstellen:

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{D} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Geradengleichung*

Eine Gerade g ist durch einen Ortsvektor $\overrightarrow{P}$ und einen Richtungsvektor $\overrightarrow{v}$ eindeutig bestimmt:

$$g : \overrightarrow{X} = \overrightarrow{P} + \mu \cdot \overrightarrow{v} \quad , \mu \in \mathbb{R}$$

Wenn A als Aufpunkt genommen wird, dann ist $\overrightarrow{A}$ der Ortsvektor (des Aufpunkts) der Geraden g_{AD}.

$$g_{AD} : \overrightarrow{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{A}} + \mu \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{AD}}$$

Lage eines Punktes

$Q \in g_{AD} \quad \Rightarrow \quad Q(6|3|6\mu)$

Lagebeziehung von Vektoren

$$\overrightarrow{QF} = \overrightarrow{F} - \overrightarrow{Q} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 6\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 12 - 6\mu \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{R} - \overrightarrow{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 6\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 2 - 6\mu \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Senkrechte Vektoren*

Das Skalarprodukt zwischen zwei Vektoren, die senkrecht zueinander stehen, ist gleich Null.

$\overrightarrow{QF} \circ \overrightarrow{QR} = 0$

$$\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 12 - 6\mu \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 2 - 6\mu \end{pmatrix} = 0$$

Erläuterung: *Skalarprodukt*

Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ ergibt sich aus der Summe der Produkte der Komponenten der Vektoren.

$$\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

$18 - 9 + (12 - 6\mu) \cdot (2 - 6\mu) = 0$

$9 + 24 - 72\mu - 12\mu + 36\mu^2 = 0$

$36\mu^2 - 84\mu + 33 = 0 \qquad | : 3$

$12\mu^2 - 28\mu + 11 = 0$

$$\mu_{1,2} = \frac{-(-28) \pm \sqrt{(-28)^2 - 4 \cdot 12 \cdot 11}}{2 \cdot 12} = \frac{28 \pm \sqrt{256}}{24} = \frac{28 \pm 16}{24}$$

$\left(\mu_1 = \dfrac{11}{6}\right) \qquad \mu_2 = \dfrac{1}{2}$

$x_3 = 6 \cdot \dfrac{1}{2} = 3$

Teilaufgabe Teil B g (3 BE)

Der Körper wird so um die Gerade AB gedreht, dass der mit D bezeichnete Eckpunkt nach der Drehung in der x_1x_2-Ebene liegt und dabei eine positive x_2-Koordinate hat. Die folgenden Rechnungen liefern die Lösung einer Aufgabe im Zusammenhang mit der beschriebenen Drehung:

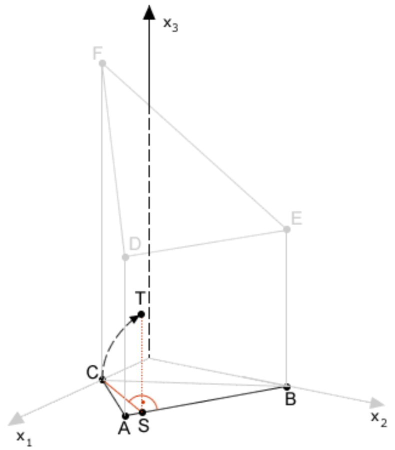
$$\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0 \iff \lambda = 0{,}8, \text{ d.h. } S(4{,}8|3{,}6|0)$$

$$\overrightarrow{T} = \overrightarrow{S} + \left|\overrightarrow{CS}\right| \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Formulieren Sie eine passende Aufgabenstellung und geben Sie die Bedeutung von S an.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B g

Lage eines Punktes



Erläuterung: *Senkrechte Vektoren*

Das Skalarprodukt zwischen zwei Vektoren, die senkrecht zueinander stehen, ist gleich Null.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{AB}} \circ \underbrace{\left[\underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{B}} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{Punkt S auf Gerade AB}} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]}_{\overrightarrow{CS}} = 0$$

$$\vec{T} = \vec{S} + \underbrace{\left|\overrightarrow{CS}\right| \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{Richtungsvektor } x_3\text{-Achse}}}_{\text{Vektor der Länge } \left|\overrightarrow{CS}\right| \text{ der in } x_3\text{-Richtung zeigt}}$$

Der Punkt, der aus dem Punkt C nach der Drehung entsteht, wird mit T bezeichnet. Berechnen Sie die Koordinaten von T.

S ist der Lotfußpunkt von C auf [AB].

© Abiturloesung.de