BE

GM1. INFINITESIMALRECHNUNG

I.

Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto \frac{x}{2} [1 + (\ln x)^2]$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}^+$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

Hinweis: Im Folgenden darf der Grenzwert $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} [x (\ln x)^n] = 0$ für $n \in \mathbb{N}$ ohne Beweis verwendet werden.

- 6 1. a) Zeigen Sie, dass $f'(x) = \frac{1}{2} (1 + \ln x)^2$ ist, und folgern Sie daraus ohne Verwendung der zweiten Ableitung, dass G_f keinen Extrempunkt besitzt.
- 5 b) Ermitteln Sie das Krümmungsverhalten von G_f und weisen Sie nach, dass G_f genau einen Terrassenpunkt besitzt. Berechnen Sie dessen Koordinaten.
- 5 c) Untersuchen Sie das Verhalten von $f(x)$ und $f'(x)$ für $x \xrightarrow{>} 0$ und für $x \rightarrow +\infty$. Geben Sie die Wertemenge W_f der Funktion f an.
- 4 d) Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von G_f mit der Winkelhalbierenden des ersten Quadranten.
[zur Kontrolle: $(e^{-1}|e^{-1})$, $(e|e)$]
- 6 2. Berechnen Sie $f(1,5)$ sowie $f(4)$ und zeichnen Sie G_f unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse im Bereich $0 < x \leq 4$ (Längeneinheit 2 cm).
- 3 3. a) Weisen Sie nach, dass $F : x \mapsto \frac{x^2}{8} [2 (\ln x)^2 - 2 \ln x + 3]$ mit $x \in \mathbb{R}^+$ eine Stammfunktion von f ist.
- 7 b) Berechnen Sie für $0 < u < e^{-1}$ den Inhalt der Gesamtfläche $A(u)$, die im Bereich $u \leq x \leq e$ zwischen G_f und der Winkelhalbierenden des ersten Quadranten liegt. Berechnen Sie $\lim_{u \rightarrow 0} A(u)$.
- 4 4. Die Funktion f ist umkehrbar (Nachweis nicht erforderlich). Der Graph der Umkehrfunktion von f wird mit $G_{f^{-1}}$ bezeichnet. Geben Sie ohne Berechnung des Terms der Umkehrfunktion den Winkel an, unter dem G_f und $G_{f^{-1}}$ sich im Punkt $(e^{-1}|e^{-1})$ schneiden, und begründen Sie Ihr Ergebnis anschaulich.