LM1. INFINITESIMALRECHNUNG

BE	I.

1. Gegeben ist die Schar der Funktionen $f_k : x \mapsto x - \ln\frac{x}{k}$ mit $k \in \mathbb{R}^+$ und Definitionsmenge $D = \mathbb{R}^+$. Der Graph von f_k wird mit G_k bezeichnet.

3 a) Untersuchen Sie das Verhalten von f_k für $x \to 0$ und für $x \to \infty$.

8 b) Bestimmen Sie Lage und Art des Extrempunktes von G_k sowie das Krümmungsverhalten von G_k. Berechnen Sie $f_1(6)$ und skizzieren Sie G_1 in ein geeignetes Koordinatensystem.

[zur Kontrolle: Tiefpunkt bei $x = 1$]

6 c) Zeigen Sie, dass G_k aus G_1 durch eine Verschiebung in Richtung der y-Achse hervorgeht.
Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen von f_k in Abhängigkeit von k. (Hinweis: Versuchen Sie nicht, die Nullstellen zu berechnen.)

4 d) Begründen Sie, dass f_k im Intervall $]0;1]$ umkehrbar ist, und geben Sie Definitions- und Wertemenge der zugehörigen Umkehrfunktion f_k^{-1} an. Geben Sie die Stelle an, an der f_k^{-1} nicht differenzierbar ist.

7 e) Betrachtet wird folgende Aussage:

$$\int_0^1 f_k(x)dx = 1{,}5 + \ln k$$

α) Weisen Sie nach, dass die Aussage wahr ist.

β) Interpretieren Sie die Aussage für $k = 1$ geometrisch.

γ) Geben Sie ein Integral über f_1^{-1} an, dessen Wert Sie mit Hilfe der Aussage ermitteln können, und bestimmen Sie diesen Wert.

3 f) In dieser Teilaufgabe werden diejenigen Funktionen f_k betrachtet, deren Graphen G_k die x-Achse jeweils in genau zwei Punkten schneiden. Durch G_k, die beiden Koordinatenachsen sowie die Gerade $x = 1$ werden dann jeweils im Bereich $x \le 1$ zwei Flächenstücke endlichen Inhalts festgelegt, von denen das eine oberhalb, das andere unterhalb der
x-Achse liegt. Bestimmen Sie k so, dass diese beiden Flächenstücke inhaltsgleich sind.

(Fortsetzung nächste Seite)

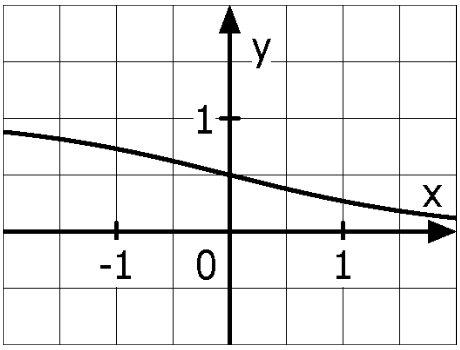
BE

2. Gegeben ist eine in $\mathbb{R}$ definierte, zweimal differenzierbare Funktion g mit der Eigenschaft

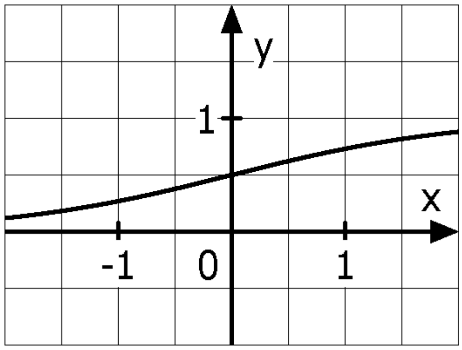
$$g'(x) = g(x) \cdot [1 - g(x)] \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

3 a) Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:
$g''(x) = g(x) \cdot [1 - g(x)] \cdot [1 - 2 \cdot g(x)]$

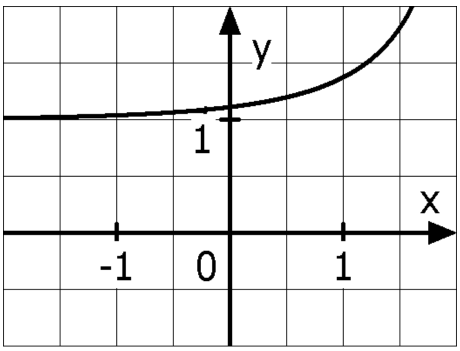
6 b) Einer der vier im Folgenden abgebildeten Graphen stellt den Graphen von g dar. Geben Sie an, welcher dies ist, und begründen Sie Ihre Antwort, indem Sie erklären, warum die anderen nicht in Betracht kommen.



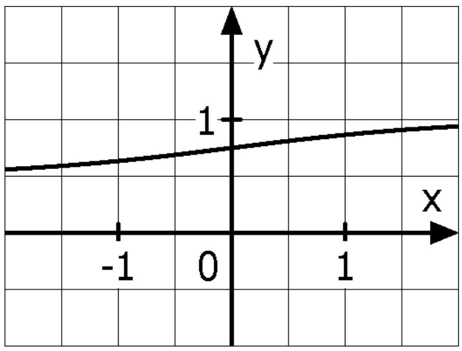
Graph I



Graph II



Graph III



Graph IV

40