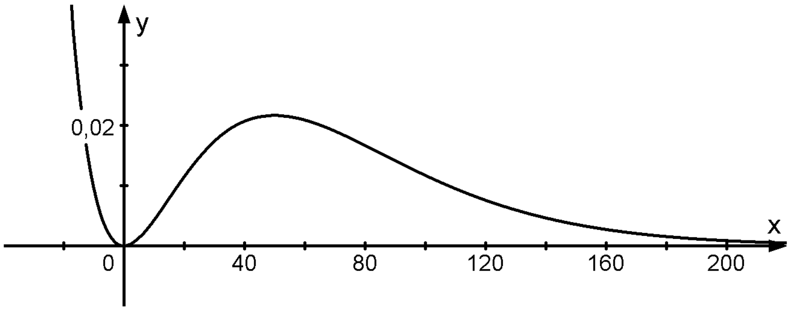
INFINITESIMALRECHNUNG

II.

BE

Gegeben ist die Schar der Funktionen $f_a : x \mapsto a^3 x^2 e^{-ax}$ mit $a \in \mathbb{R}^+$ und der Definitionsmenge $\mathbb{R}$. Der Graph von f_a wird mit G_a bezeichnet. Die Abbildung zeigt G_a für $a = 0{,}04$.



3 1. a) Untersuchen Sie am Funktionsterm das Verhalten von f_a für $x \to -\infty$ und für $x \to +\infty$. Begründen Sie, dass G_a nie unterhalb der x-Achse verläuft.

7 b) Bestimmen Sie Art und Lage der Extrempunkte von G_a.

[Zur Kontrolle: Tiefpunkt bei $x = 0$ und Hochpunkt bei $x = \frac{2}{a}$]

2. Nun werden die in $\mathbb{R}$ definierten Integralfunktionen $F_a : x \mapsto \int_0^x f_a(t)dt$ betrachtet.

4 a) Begründen Sie ohne Ausführung der Integration, dass der Graph von F_a für alle $a \in \mathbb{R}^+$ durch den Koordinatenursprung verläuft und dort einen Terrassenpunkt besitzt.

10 b) Berechnen Sie durch partielle Integration einen integralfreien Term für F_a. Geben Sie den Grenzwert von F_a für $x \to +\infty$ an und interpretieren Sie das Ergebnis am Graphen G_a.

[Teilergebnis: $F_a(x) = 2 - e^{-ax} \cdot (a^2x^2 + 2ax + 2)$]

6 c) Nun sei $a = 0{,}04$. Der Graph der Funktion $F_{0,04}$ besitzt für $x > 0$ einen Wendepunkt W. Bestimmen Sie die Koordinaten von W.
Skizzieren Sie unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse den Graphen von $F_{0,04}$ im Bereich $-30 \le x \le 200$ in ein Koordinatensystem (x-Achse: 50 LE □ 2,5 cm, y-Achse: 1 LE □ 2,5 cm). Verwenden Sie dazu ohne Nachweis: $F_{0,04}(-30) \approx -1{,}45$ und $F_{0,04}(200) \approx 1{,}97$.

(Fortsetzung nächste Seite)

BE

3. Die Gruppe „Die toten Rosen“ gibt ein Konzert. Es beginnt um 20 Uhr, der Einlass wird ab 18 Uhr gewährt. Der Besucherzustrom soll durch eine Funktion g der Form $g(x) = k \cdot f_a(x)$ mit geeignetem a und geeignetem $k > 0$ modelliert werden. Dabei bedeutet x die seit 18 Uhr vergangene Zeit in Minuten. $g(x)$ gibt die momentane Zunahme der Besucherzahl in Besucher pro Minute an.

5 a) Bestimmen Sie die Parameter a und k, wenn das Maximum der Funktion g um 18.50 Uhr auftritt und 26 Besucher pro Minute beträgt.

5 b) Berechnen Sie für $a = 0{,}04$ und $k = 1200$ unter Verwendung des in Teilaufgabe 2b ermittelten Terms $F_a(x)$ das Integral $\int_0^{120} g(x)dx$ und interpretieren Sie das Ergebnis im Anwendungszusammenhang.

40