INFINITESIMALRECHNUNG

BE	I.
	1. Gegeben ist die Schar der Funktionen $f_k: x \mapsto \frac{x}{k+x^2}$ mit $k \in \mathbb{R}^+$ und der Definitionsmenge $\mathbb{R}$. Der Graph von f_k wird mit G_k bezeichnet.
3	a) Untersuchen Sie G_k auf Symmetrie und geben Sie das Verhalten von f_k für $x \to -\infty$ und $x \to +\infty$ an.
7	b) Bestimmen Sie Art und Lage der Extrempunkte von G_k. Die Hochpunkte von G_k bilden den Graphen einer Funktion h. Ermitteln Sie Funktionsterm und Definitionsmenge von h. [Teilergebnis: Hochpunkt bei $x = \sqrt{k}$]
3	c) Zeigen Sie, dass zwei verschiedene Graphen der Schar nur den Koordinatenursprung gemeinsam haben.
5	d) Skizzieren Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse die Graphen G_k für $k = 0{,}25$ und $k = 1$ in ein gemeinsames Koordinatensystem (Längeneinheit 2 cm). Zeichnen Sie auch den Graphen von h ein.
7	e) Für jedes k begrenzt G_k mit der x-Achse im I. Quadranten ein Flächenstück, das sich ins Unendliche erstreckt. Zeigen Sie, dass dieses Flächenstück keinen endlichen Inhalt besitzt. Für beliebige positive k_1, k_2 $(k_1 \neq k_2)$ begrenzen G_{k_1} und G_{k_2} im I. Quadranten ein Flächenstück, das sich ebenfalls ins Unendliche erstreckt. Zeigen Sie, dass dieses Flächenstück einen endlichen Inhalt hat, und geben Sie diesen an.
5	2. Nun wird die Schar der Funktionen $f_k: x \mapsto \frac{x}{k+x^2}$ für $k \in \mathbb{R}_0^-$ betrachtet. Geben Sie die maximale Definitionsmenge D_k von f_k in Abhängigkeit von k an. Zeigen Sie, dass an den Definitionslücken Polstellen vorliegen. Hat f_k an den Polstellen einen Vorzeichenwechsel? Begründen Sie Ihre Antwort.

(Fortsetzung nächste Seite)

BE	
4	3. a) Die drei folgenden Abbildungen zeigen Halbkreise mit Radius r und Mittelpunkten $(0\,|\,0)$, $(0\,|\,r)$ und $(r\,|\,0)$. Begründen Sie, dass der Halbkreis in Bild 1 Graph der Funktion $f_1 : x \mapsto \sqrt{r^2 - x^2}$ mit $-r \le x \le r$ ist. Die Halbkreise der Bilder 2 und 3 sind Graphen der Funktionen f_2 und f_3. Geben Sie jeweils Term und Definitionsmenge für f_2 und f_3 an.

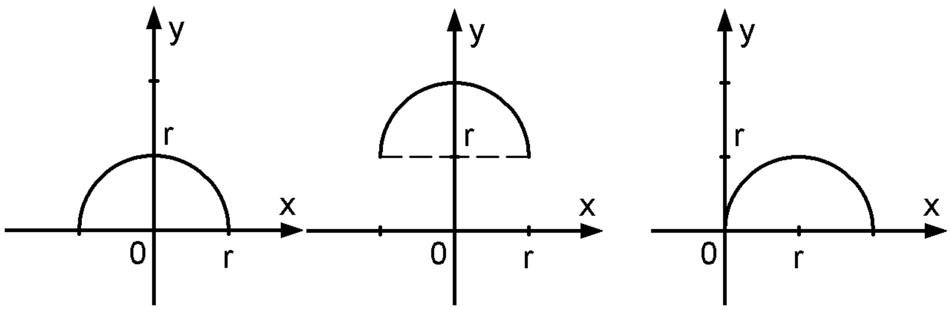

Bild 1 Bild 2 Bild 3

6	b) Ein kugelförmiger Tank hat den Innenradius r und ist mit einer Flüssigkeit gefüllt. Die Höhe der eingefüllten Flüssigkeit ist h. Zeigen Sie mit Hilfe der Integralrechnung, dass für das Volumen V der eingefüllten Flüssigkeit gilt: $V = \pi(rh^2 - \frac{1}{3}h^3)$.
40