ANALYTISCHE GEOMETRIE

BE

VI.

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(2|0|1)$, $B(2|-2|0{,}5)$ und $C(0|-4|1)$ sowie die Ebene $F: x_1 + x_2 + 2x_3 - 4 = 0$ gegeben.

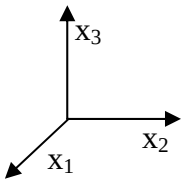
6 1. a) A, B und C legen die Ebene E fest. Bestimmen Sie je eine Gleichung der Ebene E in Parameterform sowie in Normalenform.

[mögliches Teilergebnis: $E: 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 8 = 0$]

6 b) Bestätigen Sie, dass die Gerade $s: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\sigma \in \mathbb{R}$ die Schnittgerade der Ebenen E und F ist, und begründen Sie, dass s in der x_1x_3-Koordinatenebene liegt.

4 c) Zeigen Sie, dass die Punkte $R(4|0|0)$ und $S(0|0|2)$ auf der Geraden s liegen und dass die Punkte $T(0|-8|0)$ beziehungsweise $U(0|4|0)$ die Schnittpunkte der Ebene E beziehungsweise der Ebene F mit der x_2-Achse sind.

4 d) Zeichnen Sie die Punkte R, S, T und U sowie die Gerade s in ein Koordinatensystem (vgl. Skizze) ein und veranschaulichen Sie die Lage der Ebenen E und F durch Einzeichnen ihrer Spurgeraden.



2. In einem Geländemodell liegen die Hänge eines Bergrückens in den Ebenen E und F. Der Grat dieses Bergrückens wird von einem Teil der Geraden s gebildet. Die x_1-Achse zeigt in Südrichtung, die x_2-Achse in Ostrichtung. Vom Punkt B aus wird horizontal ein Tunnel in Ostrichtung durch den Berg bis zur Ebene F gebohrt.

7 a) Berechnen Sie die Länge des Tunnels im Geländemodell.

6 b) Vom Punkt $P(2|p_2|p_3)$ der Geraden TR soll in der Ebene E eine geradlinige Zufahrtsstraße zum Tunneleingang B angelegt werden. Berechnen Sie die Koordinaten von P und begründen Sie, dass diese Zufahrt zum Tunneleingang B bergauf und genau von Westen nach Osten verläuft.

7 c) Berechnen Sie für diese Zufahrtsstraße von P nach B den Neigungswinkel α gegen die Horizontale. Beschreiben Sie mit kurzer Begründung, in welchem Punkt L der Strecke [TR] die steilstmögliche geradlinige Zufahrtsstraße zum Tunneleingang B beginnen würde.

(Hinweis: Die Koordinaten von L müssen nicht berechnet werden.)

40