

LM1. INFINITESIMALRECHNUNG

BE	I.
	1. Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.
6	a) Untersuchen Sie f auf Nullstellen. Bestimmen Sie das Symmetrieverhalten von G_f und zeigen Sie, dass die Geraden mit den Gleichungen $y = -1$ und $y = 1$ Asymptoten von G_f sind.
8	b) Zeigen Sie, dass f streng monoton zunehmend ist. Berechnen Sie $f(1)$ sowie $f'(0)$ und skizzieren Sie G_f unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse in ein Koordinatensystem.
2	c) Geben Sie den Term einer Stammfunktion von f an.
5	d) f besitzt eine Umkehrfunktion f^{-1}. Geben Sie die Definitionsmenge von f^{-1} an und bestimmen Sie für f^{-1} einen Funktionsterm. (Hinweis: Erweitern Sie den Term von f mit e^x.)
	[mögliches Teilergebnis: $f^{-1}(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$]
	2. Die Fallgeschwindigkeit eines Fallschirmspringers vor Öffnen des Schirms wird in guter Näherung beschrieben durch den Term $v(t) = 50 \cdot f(0,2t) = 50 \cdot \frac{e^{0,2t} - e^{-0,2t}}{e^{0,2t} + e^{-0,2t}} \text{ mit } t \geq 0.$ Dabei ist t die Maßzahl der Fallzeit in Sekunden, $v(t)$ die Maßzahl der Fallgeschwindigkeit in $\frac{m}{s}$ und f die Funktion aus Aufgabe 1.
3	a) Berechnen Sie $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t)$ und deuten Sie das Ergebnis im genannten Anwendungsbezug.
4	b) Berechnen Sie auf eine Dezimale gerundet die Zeit, nach der der Springer eine Geschwindigkeit von $49 \frac{m}{s}$ erreicht hat. (Die Absprunghöhe wird als genügend groß vorausgesetzt.)
4	c) Die Maßzahl der in der Zeit 11,5 s durchfallenen Strecke (in m) ist gegeben durch $\int_0^{11,5} v(t) dt$. Berechnen Sie dieses Integral.

(Fortsetzung nächste Seite)

BE	
	3. Gegeben ist eine auf $\mathbb{R}$ definierte Funktion h, deren Funktionsgleichung in der Form $y = h(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$ geschrieben werden kann. g ist hierbei eine Funktion, die mit ihrer zweiten Ableitung übereinstimmt, d. h. es gilt $g''(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Die Funktion f aus Aufgabe 1 ist ein Beispiel für eine derartige Funktion h.
4	a) Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $h'(x) = 1 - [h(x)]^2$.
4	b) Folgern Sie aus der Gleichung von Teilaufgabe 3a: Verläuft der Graph von h im Streifen $-1 < y < 1$, dann steigt er dort streng monoton. Begründen Sie kurz, dass der Graph von h die Gerade $y = 1$ nicht überqueren kann.
40	