

LM3. ANALYTISCHE GEOMETRIE

BE	V.
	1. Gegeben ist in einem kartesischen Koordinatensystem des \mathbb{R}^3 die Ebenenschar $E_k : kx_1 + k^2x_2 + 2x_3 - k^2 = 0$ mit $k \in \mathbb{R}$ als Scharparameter.
4	a) Ermitteln Sie, für welche Werte von k die Ebene E_k den Punkt $P(1 2 -3)$ und zugleich den Punkt $Q(0 1 0)$ enthält.
5	b) Die beiden Ebenen E_2 und E_{-3} schneiden sich in einer Geraden g . Ermitteln Sie eine Gleichung von g in Parameterform und den Schnittwinkel der beiden Ebenen auf eine Dezimale gerundet. <div style="text-align: center; margin-top: 10px;">[mögliches Teilergebnis: $g : \bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$]</div>
4	c) Mit $e(k)$ werde der Betrag des Abstands der Ebene E_k vom Koordinatenursprung bezeichnet. Zeigen Sie, dass $e(k) = \frac{k^2}{\sqrt{k^2+k^4+4}}$ und dass $e(k) < 1$ ist.
5	d) Es gibt zwei Scharebenen, deren Schnittwinkel mit der x_3 -Achse 30° beträgt. Ermitteln Sie die zugehörigen Werte von k .
3	e) Untersuchen Sie, ob die Gerade g aus Teilaufgabe 1b senkrecht auf einer Ebene der Schar E_k steht.
	2. Nun ist weiter die Kugel K mit dem Mittelpunkt $M(1 2 3)$ und dem Radius $r = 6$ gegeben. Die Scharebene E_{-1} schneidet die Kugel K in einem Kreis k_s mit dem Mittelpunkt N und dem Radius r_s .
6	a) Berechnen Sie die Koordinaten von N und den Radius r_s . <div style="text-align: right; margin-top: 10px;">[Ergebnis: $N(2 1 1); r_s = \sqrt{30}$]</div>
4	b) Zeigen Sie, dass der Punkt $R(3 6 -1)$ auf dem Schnittkreis k_s liegt, und stellen Sie eine Gleichung der Tangentialebene T auf, die die Kugel K im Punkt R berührt. <div style="text-align: center; margin-top: 10px;">[mögliches Teilergebnis: $T : x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 17 = 0$]</div>
5	c) Die Ebene E_{-1} und die Tangentialebenen an die Kugel K in allen Punkten des Schnittkreises k_s begrenzen einen geraden Kreiskegel. Berechnen Sie das Volumen dieses Kegels.
4	d) Zeigen Sie, dass der Punkt $U(3 -2 -1)$ auf der Kugel K und innerhalb des Kreiskegels liegt.
40	