Gegeben sind in einem kartesischen Koordinatensystem mit Ursprung O die Punkte $A(5 | 2 | 2)$ und $C(12 | 2 | 26)$, die Ebene $E: 4x_1 + 3x_3 - 51 = 0$ sowie

die Geraden $g: \vec{x} = \vec{OA} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \vec{OC} + \mu \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 24 \end{pmatrix}$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

2 1. a) Zeigen Sie, dass A Schnittpunkt der beiden Geraden g und h ist.

8 b) Die Geraden g und h spannen eine Ebene F auf.
Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene F in Normalenform und zeigen Sie, dass F eine Lotebene zur Ebene E ist. Welche besonderen Lagen im Koordinatensystem haben die beiden Ebenen E und F?

[mögliches Teilergebnis: $F: x_2 - 2 = 0$]

6 c) Weisen Sie nach, dass die Gerade g parallel zur Ebene E verläuft, und ermitteln Sie ihren Abstand von der Ebene E.

5 d) Berechnen Sie den Schnittwinkel α von g und h.
Geben Sie mit Begründung die Größe des Schnittwinkels von h und E an.

6 2. a) Ermitteln Sie die Koordinaten zweier Punkte B und B' auf der Geraden g so, dass die Dreiecke ABC und ACB' gleichschenkelig mit Basis [BC] bzw. [B'C] sind. B sei derjenige der beiden Punkte mit positiver x_1 -Koordinate.

[Teilergebnis: $B(20 | 2 | -18)$]

3 b) Begründen Sie ohne Rechnung, dass das Dreieck BCB' rechtwinklig ist.

3 c) M ist Mittelpunkt der Strecke [BC].
Berechnen Sie die Koordinaten von M und begründen Sie ohne Rechnung, dass [AM] eine Höhe des Dreiecks ABC ist.

[Teilergebnis: $M(16 | 2 | 4)$]

7 d) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC einen Flächeninhalt von 250 Flächeneinheiten hat, und begründen Sie, dass für jede Pyramide mit der Grundfläche ABC und der Spitze $S(s_1 | s_2 | s_3)$ mit $s_2 \neq 2$ gilt: $V_{ABCS} = \frac{250}{3} \cdot |s_2 - 2|$ Volumeneinheiten.