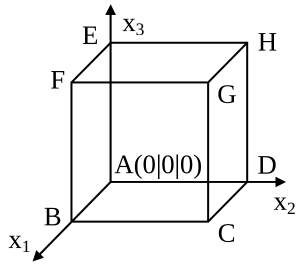
BE

VI.



Gegeben ist eine Kugel K mit dem Radius 5, die in eine im Koordinatensystem stehende würfelförmige Schachtel ABCDEFGH mit der Kantenlänge 10 (siehe Abbildung) verpackt ist, sowie die Punkteschar $P_a(10\,|\,0\,|\,\frac{5(a+2)}{a+1})$ mit dem Parameter $a \in \mathbb{R}_0^+$.

2 1. a) Wie viel Prozent des Schachtelvolumens füllt die Kugel aus?

5 b) Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte Z_1 und Z_2, in denen die Gerade DF die Kugel schneidet.

[Zur Kontrolle: $Z_1(5+\frac{5}{3}\sqrt{3}\,|\,5-\frac{5}{3}\sqrt{3}\,|\,5+\frac{5}{3}\sqrt{3})$]

5 c) Geben Sie die kürzeste Strecke an, auf der sich der Punkt P_a bewegt, wenn a das Intervall $[0;\infty[$ durchläuft. Begründen Sie Ihre Antwort.

Um diese Verpackung attraktiver zu gestalten, werden durch Ebenen, die senkrecht zu den Raumdiagonalen des Würfels verlaufen, an allen seinen Ecken kongruente dreiseitige Pyramiden abgeschnitten.

3 2. a) Um welche besonderen Dreiecke handelt es sich bei der Grundfläche (Schnittfläche) und den Seitenflächen der abgeschnittenen Pyramiden?

4 b) Bestimmen Sie eine Gleichung derjenigen Ebene S_a in Normalenform, die senkrecht zu DF liegt und den Punkt P_a enthält.

[mögliches Ergebnis: $S_a: x_1 - x_2 + x_3 - \frac{15a+20}{a+1} = 0$]

3. Im Folgenden sei $a = 4$.

5 a) Zeigen Sie durch Rechnung, dass die Ebene S_4 die Kugel nicht schneidet.

5 b) Zeichnen Sie den Würfel, den Punkt P_4 und die Schnittfläche der Ebene S_4 mit dem Würfel in ein Koordinatensystem (Orientierung wie in obiger Abbildung) ein.

6 c) Berechnen Sie die Volumenverkleinerung der Schachtel und die Oberflächenabnahme der Schachtel, wenn in gleicher Weise wie durch S_4 an der Ecke F an allen Würfelecken Pyramiden abgeschnitten werden.

5 d) Die Ebene S_4 und die drei entsprechenden Ebenen, die die oberen Ecken E, G und H des Würfels abschneiden, haben genau einen Punkt W gemeinsam (Nachweis nicht erforderlich). Berechnen Sie die Koordinaten von W.

40