

LM3. ANALYTISCHE GEOMETRIE

V.

BE

In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ sind die

Ebene $E : x_2 - x_3 - 1 = 0$, die Geradenschar $g_k : \vec{x} = \begin{pmatrix} -k^2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und

die Gerade $h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ gegeben, wobei k, λ und μ aus $\mathbb{R}$ sind.

3 1. a) Zeigen Sie: Alle Geraden der Schar g_k sind zueinander parallel und liegen in der Ebene E .

4 b) Begründen Sie, dass die Schar der Geraden g_k eine Halbebene von E bildet.

5 c) Für welche Werte von k schneidet g_k die Gerade h ? Ermitteln Sie die Koordinaten des Schnittpunkts S .

[Teilergebnis: $S(2 | \frac{5}{3} | \frac{2}{3})$]

5 d) Projiziert man h senkrecht auf E , so erhält man die Gerade h_E . Berechnen Sie den Winkel φ zwischen h_E und h in Grad auf eine Nachkommastelle gerundet.

2. Die Ebene E ist Tangentialebene an zwei Kugeln K_1 und K_2 mit den Radien $5\sqrt{2}$, deren Mittelpunkte M_1 und M_2 auf der Geraden h liegen.

6 a) Bestimmen Sie die Koordinaten von M_1 und M_2 . (Der Punkt mit ausschließlich ganzzahligen Koordinaten wird mit M_1 bezeichnet.)

[Teilergebnis: $M_1(2 | 5 | -6)$]

3 b) Die Kugelpunkte $P \in K_1$ und $Q \in K_2$ sind diejenigen Punkte, die minimale Distanz voneinander haben. Berechnen Sie die Entfernung $\overline{PQ}$ auf zwei Dezimalen gerundet.

4 c) Spiegelt man die Ebene E am Punkt M_1 , so erhält man die Ebene E^* . Geben Sie eine Gleichung von E^* in Normalenform an.

(Fortsetzung nächste Seite)

BE	
4	d) Zeigen Sie, dass die Punkte $A(-1 0 -2)$ und $C(-1 1 -1)$ auf der Kugel K_1 um M_1 liegen, und bestimmen Sie die Koordinaten von B so, dass die Strecke $[AB]$ ein Durchmesser von K_1 ist. [Teilergebnis: $B(5 10 -10)$]
6	e) Das Dreieck ABC ist die Grundfläche einer Pyramide ABCD, deren Spitze D ebenfalls auf der Kugel K_1 liegt. Alle Punkte D, für die die Pyramiden ABCD das Volumen 11 haben, bilden zwei Kreise auf der Kugeloberfläche (Nachweis nicht erforderlich). Berechnen Sie zuerst die Höhe h dieser Pyramiden und anschließend mit Hilfe einer geeigneten Skizze den Radius R der beiden oben definierten Kreise. [Zur Kontrolle: $h = \sqrt{11}$]
40	