GM1. INFINITESIMALRECHNUNG

I.

BE

Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto 1 - (\ln x)^2$ mit dem Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}^+$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

- 4 1. a) Bestimmen Sie die Nullstellen von f und ermitteln Sie das Verhalten von f an den Rändern des Definitionsbereichs.
- 7 b) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von G_f und bestimmen Sie Lage und Art des Extrempunkts E von G_f . Geben Sie die Wertemenge W_f von f an. [Teilergebnis: $E(1|1)$]
- 3 c) Die einzige Wendestelle von f ist $x_w = e$ (Nachweis nicht erforderlich). Bestimmen Sie die Gleichung der Wendetangente w . [Zur Kontrolle: $y = -\frac{2}{e} \cdot x + 2$]
- 6 d) Berechnen Sie $f(e^{-2})$ und $f(6)$. Zeichnen Sie die Wendetangente w und den Graphen G_f unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse im Bereich $0 < x \leq 6$.
2. Die Funktion $F : x \mapsto -x(\ln x - 1)^2$ mit $D_F = \mathbb{R}^+$ ist Stammfunktion von f (Nachweis nicht erforderlich).
- 4 a) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von G_f und der x -Achse im ersten Quadranten begrenzt wird.
- 3 b) Begründen Sie, dass die Stammfunktion F zugleich die Integralfunktion $x \mapsto \int_e^x f(t)dt$ mit $x \in \mathbb{R}^+$ ist.
- 4 c) Berechnen Sie $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$. Deuten Sie dieses Ergebnis anhand des Graphen G_f geometrisch.
(Hinweis: $\lim_{x \rightarrow 0^+} [x(\ln x)^n] = 0$ für $n \in \mathbb{N}$ darf ohne Beweis verwendet werden.)

(Fortsetzung nächste Seite)

BE
5
4
40

3. Durch zentrische Streckung von G_f mit dem Ursprung als Zentrum und dem Streckungsfaktor 2 erhält man den Graphen G_2 einer Funktion f_2 .

a) Welche Koordinaten hat bei dieser Abbildung der Bildpunkt eines beliebigen Punktes $P(a \mid b)$ von G_f ? Zeichnen Sie G_2 und seine Wendetangente w_2 in das Koordinatensystem von Aufgabe 1d ein.

b) Geben Sie den Funktionsterm von f_2 sowie ohne weitere Rechnung die Gleichung der Wendetangente w_2 an.