

LM3. ANALYTISCHE GEOMETRIE

V.

BE

In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ ist die Ebene
 $H: x_1 + x_2 + x_3 - 8 = 0$ sowie die Schar von Geraden

$$g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} a^2 \\ 0 \\ -a^2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3a \\ -3a \\ 8 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R} \text{ gegeben.}$$

- 3 1. a) Zeigen Sie, dass keine der Geraden g_a parallel und keine senkrecht zur Ebene H verläuft.
- 6 b) Welche dieser Geraden schneidet H unter dem größten Winkel? Berechnen Sie diesen maximalen Winkel auf eine Dezimale genau.
- 3 c) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts S_a von g_a mit H .

[Zur Kontrolle: $S_a(a^2 + 3a \mid -3a \mid 8 - a^2)$]
- 9 d) Zeigen Sie, dass der Punkt $S(-2 \mid 6 \mid 4)$ derjenige Punkt aus der Schar der Schnittpunkte S_a ist, der die geringste Entfernung vom Ursprung hat. Geben Sie diese Entfernung an.
- 8 e) Die Punkte S_a bilden in H eine Kurve. Diese wird parallel zur x_3 -Achse in die x_1x_2 -Ebene projiziert; die Projektion heißt P .
 Fertigen Sie eine Zeichnung von P in der x_1x_2 -Ebene an. Um welchen Kurventyp handelt es sich bei P vermutlich? Überprüfen Sie Ihre Vermutung, indem Sie eine Koordinatengleichung von P aufstellen.
2. Ferner sind die Punkte $A(1 \mid 6 \mid 1)$ und $B(-2 \mid 9 \mid 1)$ gegeben.
- 5 a) Weisen Sie nach, dass sich die Punkte A und B zu einem regulären Sechseck $ABCDEF$ mit dem Mittelpunkt $S(-2 \mid 6 \mid 4)$ ergänzen lassen.
 Ermitteln Sie die Koordinaten der Ergänzungspunkte C und D .
- 6 b) Das Sechseck $ABCDEF$ rotiert nun um die Achse AD .
 Beschreiben Sie das Aussehen des dabei entstehenden Rotationskörpers. Ermitteln Sie eine Gleichung der kleinsten Kugel, die den Rotationskörper enthält.
 Liegt der Ursprung des Koordinatensystems innerhalb oder außerhalb dieses Rotationskörpers? Begründen Sie Ihre Antwort.